La macchina di Galileo Galilej

La macchina
di
Galileo Galilei

CREDITI

Proprietà intellettuale e copyright: ROBERTO VERGARA CAFFARELLI
Proprietà del prototipo: DIPARTIMENTO DI FISICA - Università di Pisa
Realizzazione delle strutture meccaniche: STEFANO GENNAI - Università di Pisa
Realizzazione delle apparecchiature elettroniche: ALESSANDRO MASETTI - Università di Pisa
Progettazione e realizzazione delle interfacce hardware e software: ALBERTO DI LIETO - Scuola Normale Superiore
Progettazione grafica ed impaginazione elettronica: IRENE TARANTINO - Fondazione Galileo Galilei

LA MACCHINA DI GALILEI

di

Roberto Vergara Caffarelli

Dipartimento di Fisica "E. Fermi" - Università di Pisa

Le ricerche di Galileo sulla "forza della percossa"

Galileo, con lo studio degli effetti della percossa, crea i fondamenti della dinamica. Per prima cosa, analizza il concetto di velocità relativa, riconoscendo che è uno degli elementi importanti per comprendere ciò che avviene nell'urto.

> Figuratevi di andare ad incontrare colla mano una palla che venga scendendo da alto, e ditemi: se nell'arrivare ella sopra la vostra mano, voi la mano andaste abbassando per la medesima linea e colla medesima velocità che scende la palla, ditemi, dico, qual percossa voi sentireste? Certo nessuna. Ma se all'arrivo della palla voi andaste solamente in parte cedendo, con abbassar la mano con minor velocità di quella della palla, voi bene ricevereste percossa, ma non come da tutta la velocità della palla, ma solamente come dall'eccesso della velocità di quella sopra la velocità della cedenza della mano: sicché quando la palla scendesse con 10 gradi di velocità e la mano cedesse con otto, il colpo sarebbe come fatto da due gradi di velocità della palla; e cedendo la mano con 4, il colpo sarebbe come di 6; ed essendo il cedere come uno, il percuoter sarebbe come 9; e tutta l'intera percossa della velocità de' 10 gradi sarebbe quella che percotesse sopra la mano che nulla cedesse[1].

Con grande abilità didattica Galileo introduce il lettore in un esperimento facile da immaginare e da fare: l'urto[2] di una palla

[1] Galileo Galilei, *Opere*, Firenze 1968 (d'ora in avanti indicato con G.G.), vol. VIII, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, Giornata Sesta, p. 331-332.

[2] Galileo scrive sempre *percossa*, un termine con cui traduce la parola latina *percutio*

contro la mano, proponendo alcuni valori per le velocità al momento della collisione. L'ultima espressione è illuminante: l'effetto massimo della percossa si ha quando la mano nulla cede, cioè quando il colpo è interamente assorbito. Galileo fa uso di due termini: impeto e momento. L'impeto, per lui, è differente sia dalla semplice velocità che dal peso «il quale, operando colla sola gravità senza moto precedente, chiameremo peso morto».

> È manifesto, la facultà della forza del movente e della resistenza del mosso non essere una e semplice, ma composta di due azioni, dalle quali la loro energia dee essere misurata; l'una delle quali è il peso, sì del movente come del resistente, e l'altra è la velocità, secondo la quale quello dee muoversi e questo esser mosso[3].

Galileo chiama impeto un «aggregato di velocità e di gravità», che oggi i manuali di fisica chiamano quantità di moto, il cui valore p, variabile nel tempo, è dato dal prodotto della massa m per la velocità v: $p = mv$. Nel pensiero di Galileo il momento invece può essere sia la quantità di moto p, che è variabile, sia la forza peso mg, dove g è l'accelerazione di gravità 9,8 ms^{-2}, che invece è costante nel tempo:

> Il momento di un grave nell'atto della percossa altro non è che un composto ed aggregato di infiniti momenti, ciascuno di essi eguale al solo momento, o interno e naturale di sè medesimo (che è quello della propria gravità assoluta, che eternamente egli esercita posando sopra qualunque resistente), o estrinseco e violento, quale è quello della forza movente. Tali momenti nel tempo della mossa del grave si vanno accumulando di instante in instante con eguale additamento e conservando in esso, nel modo appunto che si va accrescendo la velocità di un grave cadente; ché siccome negl'infiniti instanti di un tempo, benché minimo, si va sempre passando da un grave per nuovi ed eguali gradi di velocità, con ritener sempre gli acquistati nel tempo precorso, così anche nel mobile si vanno conservando di instante in instante e componendosi quei momenti, o naturali o violenti,

3 G.G., vol. VIII, cit., p. 329.

conferitigli o dalla natura o dall'arte, etc.[4]

Per comprendere quanto Galileo sia arrivato vicino al concetto di conservazione della quantità di moto e alla giusta interpretazione dell'effetto della percossa come impulso di una forza, traduciamo le sue parole in un linguaggio più formalizzato.
Indichiamo con M_p e M_m le masse della palla e della mano, con v_p e v_m le velocità della palla e della mano e con Δp il colpo assorbito. Supponiamo che la palla rimanga nella mano e che essa mantenga la velocità che aveva, anche dopo aver raccolto la palla. La relazione tra le loro quantità di moto, immediatamente prima e dopo la percossa, è data dalla seguente espressione

$$M_p v_p + M_m v_m = (M_p + M_m)v_m + \Delta p$$

Cioè

$$M_p (v_p - v_m) = \Delta p$$

Quindi la percossa è proporzionale alla velocità relativa, come aveva affermato Galileo. Se poi la mano resta ferma, prima, durante e dopo l'urto, il colpo dipende dalla intera velocità della palla.
Galileo poco più avanti inventa la macchina che 150 anni dopo avrebbe reinventato George Atwood:

> stimo che sia necessario l'andar contemplando [la forza della percossa] sopra tale, che, ricevendo le percosse, a quelle sempre colla medesima resistenza si opponga. Ora, per istabilire tal resistente, voglio che ci figuriamo un solido grave, per esempio di mille libre[5] di peso, il quale posi sopra un piano che lo sostenti; voglio poi che intendiamo una corda a cotal solido legata, la quale cavalchi sopra una carrucola

4 G.G., vol. VIII, cit., p. 344.

5 In seguito si parlerà sempre di 100 libre, che sembra un peso più ragionevole. Infatti l00 libbre = 33,95 kg. La libbra toscana era divisa in 12 once; l'oncia era divisa in 24 denari; il denaro in 24 grani.

fermata in alto, per buono spazio, sopra detto solido. Qui è manifesto, che aggiungendo forza traente in giù all'altro capo della corda, nel sollevar quel peso si averà sempre una egualissima resistenza, cioè il contrasto di mille libre di gravità; e quando da quest'altro capo si sospenda un altro solido egualmente pesante come il primo, verrà da essi fatto equilibrio; e stando sollevati, senza che sopra alcuno sottoposto sostegno si appoggino, staranno fermi, né scenderà questo secondo grave alzando il primo, salvo che quando egli abbia qualche eccesso di gravità: e se riposeremo il primo peso sopra il soggetto piano, che lo sostenga, potremo far prova con altri pesi di diversa gravità (ma ciascuno minore del peso che riposa in quiete) quali siano le forze di diverse percosse, con legare alcuni di detti pesi all'altro capo della corda, lasciando da qualche altezza cadere ed osservando quel che segue nell'altro gran solido nel sentire la strappata dell'altro peso cadente, la quale strappata sarà ad esso gran peso come un colpo che lo voglia cacciare in su. Qui, primieramente, mi pare che si raccolga, che per piccola che sia la gravità del peso cadente, doverà senz'altro superare la resistenza del peso gravissimo ed alzarlo; la qual conseguenza mi par che si tragga molto concludentemente dalla sicurezza che abbiamo, come un peso minore prevalerà ad un altro quanto si voglia maggiore, qualunque volta la velocità del minore abbia maggior proporzione alla velocità del maggiore che non ha la gravità del maggiore alla gravità del minore: ma ciò segue nel presente caso, nel quale la velocità del peso cadente supera d'infinito intervallo quello dell'altro peso, la quale è nulla, posando egli in quiete; ma non già è nulla la gravità del corpo cadente in relazione alla gravità dell'altro, non potendo noi questa infinita, né quella nulla; supererà dunque la forza di questo percuziente la resistenza di quello in cui si impiega la percossa[6].

Non può che essere di origine sperimentale la sicurezza su cui si basa Galileo per affermare che, dati due pesi, gm_1 e gm_2, (ricordo che $g = 9{,}8\ m/s^2$ sta sempre a indicare l'accelerazione di gravità), che abbiano velocità v_1 e v_2; e sia $m_1 > m_2$: il peso minore prevarrà sul maggiore ogni qualvolta si abbia $gm_1\, v_1 < gm_2 v_2$.
Galileo, tuttavia, non si accontenta di un risultato qualitativo, vuole arrivare ad una misura precisa della percossa e avanza un'ipotesi:

6 G.G., vol. VIII, cit., p. 344.

> Séguita ora che cerchiamo d'investigare, quanto sia per essere lo spazio al quale la ricevuta percossa lo solleverà, e forse per questo risponda a quello delli altri strumenti meccanici: come, per esempio, nella stadera si vede, l'innalzamento del peso grave esser quella tal parte dello abbassamento del romano, quale è il peso del romano dell'altro peso maggiore; e così nel nostro caso bisogna che vediamo, se essendo la gravità del gran solido posto in quiete, per esempio mille volte maggiore della gravità del peso cadente, il quale caschi dall'altezza, v.g. di un braccio[7], egli sia alzato da questo minore un centesimo di braccio, ché così pare che venisse osservata la regola degli altri istrumenti meccanici[8].

Salviati, *alias* Galileo, a questo punto considera la situazione più semplice, quando le due masse sono uguali, e chiede ad Aproino e a Sagredo che cosa pensano che avvenga in tal caso:

> Figuriamoci di fare la prima esperienza col far cadere da qualche altezza, diciamo di un braccio, un peso eguale all'altro, che ponghiamo posare sopra un piano essendo ambedue tali pesi legati l'uno all'un capo e l'altro all'altro capo dell'istessa corda; che crediamo noi che sia per operare la strappata del peso cadente circa il muovere e sollevar l'altro, che era in quiete? Io volentieri sentirei l'opinione vostra.

Aproino risponde così:

> mi pare che essendo amendue i solidi egualmente gravi, ed avendo il cadente, di più, l'impeto della velocità, l'altro ne dovrà essere innalzato assai sopra l'equilibrio; imperocché per ridurlo in bilancio la sola gravità di quello era bastante: sormonterà dunque, per mio credere, il peso

[7] Galileo nei *Discorsi* usa il braccio fiorentino di terra che corrisponde a 550,63 mm. Qui è evidente il passaggio da 1000 a 100 libbre, indicate costantemente in seguito. Come vedremo nel quarto esperimento la relazione esatta è $(m + M_T)H = mh$. Con M=100 libbre, m=1 libbra e h=1 braccio si ha H=(1/101) braccio.

[8] G.G., vol. VIII, cit., p. 333.

ascendente per molto maggior spazio di un braccio, che è la misura della scesa del cadente[9]

Sagredo è più prudente perché le molte esperienze gli hanno insegnato «quanto sia facile l'ingannarsi, e però quanto sia necessario l'andar circospetto prima che risolutamente pronunziare ed affermare alcun detto»; per cui risponde:

> Dirò dunque (però sempre dubitando) che è vero che il peso, v.g., delle 100 libbre del grave discendente basta per alzare l'altro, che pure pesi 100 libbre, infine all'equilibrio, senza che quello venga instrutto e fornito d'altra velocità, e basterà solo l'eccesso di mezza oncia[10]; ma vo considerando che questa equilibrazione verrà fatta con gran tardità, dove che quando il cadente sopraggiunga con gran velocità, con una simile bisognerà che tiri in alto il suo compagno. Ora, non mi pare che sia dubbio che maggior forza ci voglia a cacciare con gran velocità un grave all'in su, che a spignervelo con gran lentezza; onde possa accadere che il vantaggio della velocità, guadagnata dal cadente nella libera caduta di un braccio, possa rimaner consunto, e, per modo di dire, spento, nel cacciare l'altro con altrettanta velocità ad altrettanta altezza: perloché non sarei lontano dal credere che tali due movimenti in giù ed in su terminassero in quiete immediatamente dopo la salita di un braccio del peso ascendente, che sarebbero due braccia di scesa dell'altro, computandovi il primo braccio che questo scese libero e solo[11].

Sagredo suppone un procedimento continuo in cui la corda, riacquistata la sua lunghezza massima nell'istante in cui m_2 ha completato la sua discesa di un braccio, rimane sempre tesa, con m_2 che comunica in quell'istante la sua velocità anche ad m_1. Il doversi portare dietro m_1 costringe m_2 a rallentare progressivamente, scendendo un altro braccio fino a fermarsi insieme ad m_1 che a sua volta è salito un braccio.

9 G.G., vol. VIII, cit., p. 334.

10 L'oncia è 1/12 della libra e quindi vale 28,3 g.

11 G.G., vol. VIII, cit., p. 334.

È d'accordo con Sagredo, ma solo con la prima parte del suo discorso, Salviati che interviene dopo di lui, dicendo:

> Io veramente inclino a credere questo stesso, perché, sebbene il peso cadente è un aggregato di gravità e di velocità, l'operazione della gravità nel sollevar l'altro è nulla, avendo a sé opposta e renitente altrettanta gravità dell'altro peso, il quale è manifesto che mosso non sarebbe senza l'aggiunta dell'altro di qualche piccola gravità: l'operazion dunque per la quale il peso cadente dee sollevar l'altro, è tutta della velocità, la quale altro che velocità non può conferire; né potendo conferirne altra che quella che egli ha, e non avendo altra che quella che, partendosi dalla quiete, ha guadagnata nello spazio della scesa di un braccio, per altrettanto spazio e con altrettanta velocità spignerà l'altro all'in su, conformandosi con quello che in varie esperienze si può riconoscere, che è che il grave cadente, partendosi dalla quiete, si trova in ogni sito aver tant'impeto, che basta per ridur sé stesso alla medesima altezza[12].

E a Sagredo che si ricorda che ciò accade anche con il pendolo, Galileo oppone una non piccola discrepanza tra queste due operazioni:

> tra quella del solido grave pendente dal filo, che, lasciato da qualche altezza, scendendo per la circonferenza del cerchio, acquista impeto di trasportare sé medesimo ad altrettanta altezza; e l'altra operazione del cadente legato ad un capo della corda per innalzare l'altro a sé eguale in gravità. Imperocché lo scendente per il cerchio va acquistando velocità sino al perpendicolo, favorito dalla propria gravità, la quale, trapassato il perpendicolo, lo disaiuta nel dovere ascendere (che è moto contrario alla gravità) sicché dello impeto acquistato nella scesa naturale non piccola ricompensa è il ricondurlo con moto preternaturale o per altezza. Ma nell'altro caso sopraggiugne il grave cadente al suo eguale, posto in quiete, non solamente con la velocità acquistata, ma colla sua gravità ancora, la quale, mantenendosi, leva per sé sola ogni resistenza di essere alzato all'altro suo compagno; perloché la velocità acquistata non trova contrasto di un grave che allo andare in su faccia resistenza, talché sì come l'impeto conferito all'in giù ad un grave non trova in

12 G.G., vol. VIII, cit., p. 335.

esso ragione di annichilirsi o ritardarsi, così non si ritrova in quello ascendente, la cui gravità rimane nulla, essendo contrappesata da altrettanta discendente[13].

Giunto a questo punto, per preparare il suo ragionamento, Galileo mette in gioco il principio di inerzia, enunciandolo, con parole molto vicine a quelle che aveva scritto quasi 50 anni prima nel De motu: ma, si noti bene che qui, nell'esperimento della "Macchina di Galileo", vi è una notevole generalizzazione perché l'inerzia è supposta valida anche nel moto verticale dei pesi, in quanto suppone che la risultante di tutte le forze sia nulla.

E qui mi pare che accada per appunto quello che accade ad un mobile grave e perfettamente rotondo, il quale, se si porrà sopra un piano pulitissimo ed alquanto inclinato, da per sé stesso naturalmente vi scenderà, acquistando sempre velocità maggiore; ma se, per l'opposito, dalla parte bassa si vorrà quello cacciare in su, ci bisognerà conferirgli impeto, il quale si anderà sempre diminuendo e finalmente annichilando; ma se il piano non sarà inclinato, ma orizzontale, tal solido rotondo, postovi sopra, farà quello che piacerà a noi, cioè, se ve lo metteremo in quiete, in quiete si conserverà, e dandogli impeto verso qualche parte, verso quella si moverà, conservando sempre l'istessa velocità che dalla nostra mano averà ricevuta, non avendo azione né di accrescerla né di scemarla, non essendo in tal piano né declività né acclività: et in simile guisa i due pesi eguali, pendenti da' due capi della corda, ponendogliene in bilancio, si quieteranno, e se ad uno si darà impeto all'in giù[14], quello si andrà conservando equabile sempre. E qui si dee avvertire che tutte queste cose seguirebbero quando si movessero tutti gli esterni ed accidentari impedimenti, dico di asprezza e gravità di corda, di girelle e di stropicciamenti nel volgersi intorno al

[13] G.G., vol. VIII, cit., p. 336.

[14] Si noti che Galileo dice "all'in giù" perché in tal modo il peso spinto in giù tira su l'altro, rimanendo sempre nulla la risultante della forza di gravità. Qui la corda ha solo il compito di comunicare istantaneamente "l'impeto" all'altro peso.

suo asse, ed altri che ve ne potessero essere[15].

Galileo si è raffigurato mentalmente questa situazione: al momento che la corda diviene tesa, si annulla l'azione della gravità sul peso cadente, perché agisce sopra due pesi uguali, e quindi il sistema può solo rimanere fermo o muoversi con velocità costante. Difatti si chiede:

> Ma perché si è fatta considerazione della velocità, la quale l'uno de' due pesi acquista scendendo da qualche altezza, mentre l'altro posi in quiete, è bene determinare quale e quanta sia per essere la velocità colla quale sieno per muoversi poi amendue, dopo la caduta dell'uno, scendendo questo e salendo quello.

Il punto critico della sua analisi è questo:

> Già, per le cose dimostrate, noi sappiamo che quel grave che partendosi dalla quiete liberamente scende, acquista tuttavia maggiore e maggior grado di velocità perpetuamente; sicché, nel caso nostro, il grado massimo di velocità del grave, mentre liberamente scende, è quel che si trova avere nel punto che egli comincia a sollevare il suo compagno; ed è manifesto che tal grado di velocità non si andrà piu augumentando, essendo tolta la cagione dello augumento, che era la gravità propria di esso grave descendente, la quale non opera più, essendo tolta la sua propensione di scendere dalla ripugnanza del salire di altrettanto peso del suo compagno.[16].

All'inizio ho affermato che Galileo con la sua macchina ha creato i fondamenti della dinamica: è, infatti, dinamico l'esperimento che egli ha proposto e che ha accuratamente descritto ed analizzato, anche se l'ultima affermazione non è esatta. Vediamo perché. Riassumo quanto aveva stabilito nelle precedenti giornate, dove era arrivato a dimostrare le seguenti leggi per il moto naturale dei gravi:

15 G.G., vol. VIII, cit., p. 336.

16 G.G., vol. VIII, cit., p. 337.

a) I gradi di velocità d'un mobile discendente con moto naturale dalla medesima sublimità per piani in qualsivoglia modo inclinati, all'arrivo all'orizonte son sempre eguali, rimossi gl'impedimenti[17].

b) La velocità di caduta cresce proporzionalmente al tempo[18]

$$v(t) = g\,t \qquad (1)$$

c) Vi è proporzione tra l'altezza H(t) della scesa e il quadrato del tempo necessario per scendere[19]

$$H(t) = g'\,t^2 \qquad (2)$$

Inoltre Galileo conosce un altro teorema.

d) Il tempo in cui uno spazio dato è percorso da un mobile con moto uniformemente accelerato a partire dalla quiete, è eguale al tempo in cui quel medesimo spazio sarebbe percorso dal medesimo mobile mosso di moto equabile, il cui grado di velocità sia sudduplo [la metà] del grado di velocità ultimo e massimo [raggiunto dal mobile] nel precedente moto uniformemente accelerato[20].

Cioè,

$$H(t) = g't^2 = t[v(t/2)] = t[gt/2] \qquad (3)$$

Qui ho indicato con [v(t/2)] il valore della velocità all'istante t/2 che per la (1) vale gt/2. Dalla (2) e dalla (3) segue dunque

[17] G.G., vol. VIII, p. 205.

[18] G.G., vol. VIII, p. 202 - 204.

[19] G.G., vol. VIII, p. 209.

[20] G.G., vol. VIII, p. 208.

$g' = g/2$ (4)

e quindi, ricapitolando:

$v = g\,t$ (1)

$H = (1/2)g\,t^2$ (2')

$v(t)^2 = 2\,gH(t)$ (5)

Con questo quadro teorico in mente, anche se non espresso in formule matematiche e senza un valore preciso per la costante di proporzionalità g, Galileo è portato a valutare la situazione finale come quella in cui i due pesi compagni si muovono con velocità finale costante, che è ottenuta nel modo che ha spiegato nella Terza Giornata dei *Discorsi*:

> Si conserverà dunque il detto grado massimo di velocità, ed il moto, di accelerato, si convertirà in equabile: quale poi sia per essere la futura velocità, è manifesto dalle cose dimostrate e vedute ne' passati giorni, cioè che la velocità futura sarà tale, che in altrettanto tempo quanto fu quella della scesa, si passerà doppio spazio di quello della caduta.

Applichiamo quando prescrive: da (2') segue che il tempo della scesa è $t = [2H/g]^{1/2}$ e in questo tempo lo spazio percorso con la velocità finale, secondo Galileo,

$s = v_f t = 2H$. Quindi $v_f = 2H/t = 2H/[2H/g]^{1/2} = [2gH]^{1/2} = v_i$

Si ritrova dunque l'affermazione che la velocità finale dei due pesi è quella raggiunta da m_2 nella sua caduta libera.
In realtà la velocità finale è la metà di quella iniziale e questo segue dalla conservazione della quantità di moto al momento della strappata. Trattandosi di masse uguali, posso scrivere la relazione vettoriale senza indicare la massa comune, che appare ai due lati dell'uguaglianza.

$\mathbf{V_i}(2) = \mathbf{V_f}(2) - \mathbf{V_f}(1)$ (conservazione del momento) (6)

Dato che i due pesi devono avere la stessa velocità, uno scendendo e l'altro salendo $\mathbf{V_f}(1) = -\mathbf{V_f}(2)$ e quindi introducendo nella (6) i valori in modulo delle loro velocità, si arriva a

$V_i(2) = 2\,V_f(1) = 2\,V_f(2)$ (7)

La velocità finale delle due masse accoppiate è la metà di quella raggiunta in caduta libera da m_2.
La discussione esatta dell'urto di corpi che si muovono liberamente è avvenuta contemporaneamente alla scoperta dei principi di conservazione della quantità di moto. Ad essi si sarebbe arrivati solo dopo mezzo secolo di sforzi congiunti di Huygens, Leibnitz e Newton, fino a Johann Bernoulli[21] che ha risolto l'urto di sfere che rotolano sul piano, come nel bigliardo.
A Galileo, allora, non venne in soccorso neppure l'esperimento che abbiamo appena finito di leggere, perché è difficile valutare ad occhio se vi è una differenza tra la velocità finale raggiunta dalla massa m_2 al momento in cui si tende la corda e quella successiva alla strappata, quando le due masse si muovono insieme.
Dobbiamo ricordare che gli esperienti sulla percossa furono eseguiti a Padova, prima del 1610 e che Galileo ha scritto la Sesta Giornata nel 1638, dopo che Lodowijk Elzevier, impaziente editore di Leida, aveva ormai licenziato l'edizione dei Discorsi, stampando le prime quattro giornate.
Galileo dettò a Marco Ambrosetti il testo che doveva seguire subito dopo la quarta giornata. Lo scritto, per circostanze non chiare, non

[21] C. HUYGENS, *De motu corporum ex percussione*, pubblicato in Oeuvres Complètes, La Haye, 1888-1950, vol. XVI, 1929; I. NEWTON, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, ed. 2ª, Cambridge,1713, pp. 15-24; JOHANN BERNOULLI, *De motu corporum se invicem percutientium*, San Pietroburgo1734.

fu incluso[22] nel secondo volume delle *Opere*, stampato dal Dozza a Bologna nel 1665, ma fu pubblicata nella seconda edizione delle *Opere,* quella di Firenze del 1718. Non escludo, però, che alcuni degli esperimenti discussi nella "sesta giornata" siano stati realizzati ad Arcetri tra il 1637 e il 1639. Esaminerò questo aspetto più avanti, nella presentazione degli esperimenti.
Se Galileo avesse utilizzato la sua macchina per lo studio del moto, insieme con l'orologio ad acqua, avrebbe avuto a disposizione uno strumento superiore al piano inclinato, dove il rallentamento è dovuto ad una diminuzione statica della gravità. Qui, invece, una piccola forza, data dall'eccesso di peso di uno dei due corpi, agisce sulla grande massa del sistema, mettendo in evidenza il rapporto tra inerzia e forza. Peccato che né lui, né i suoi allievi hanno portato avanti questi studi.

[22] *Opere di Galileo Galilei,* In Firenze, MDCCXVIII. Nella Stamp. Di S.A.R. Per Gio. Gaetano Tartini e Santi Franchi, Tomo II, pp. 693-710. L'editore Lodovico Elzeviro, non avendo ancora ricevuto il 1 gennaio 1638 il trattato della percossa e dell'uso della catenella, aveva chiuso e stampato il libro, arrestandosi alla quarta giornata. Vincenzio Viviani (1622-1703) l'ultimo discepolo di Galileo, racconta nel suo Quinto libro degli *Elementi* di Euclide (Firenze 1674), di aver veduto tra le mani del figlio Vincenzio, poco dopo la morte di Galileo, oltre alle bozze originali delle opere già stampate, tra altri scritti, il principio di un nuovo congresso detto ultimo, nel quale erano introdotti per interlocutori il Salviati e il Segredo, escludendo Simplicio e ponendovi per terzo Paolo Aproino, stato già suo scolaro in Padova: erano in esso spiegate alcune esperienze fatte da Galileo al tempo in cui egli era colà lettore, allorquando andava investigando la forza della percossa. Il Viviani ebbe da Vincenzio il permesso di prenderne copia. Più tardi con l'aiuto del nipote Cosimo, poté di nuovo riscontrare sull'originale la propria copia. Egli però non fece di pubblica ragione questa scrittura, la quale vide per la prima volta la luce nella sopra citata edizione fiorentina delle Opere, per la quale si ignora se gli editori si servirono dell'originale o della copia del Viviani, oggi purtroppo da ritenersi ambedue perduti. (Notizie ricavate da varie pubblicazioni di Antonio Favaro).

Descrizione della macchina

Corpo della macchina

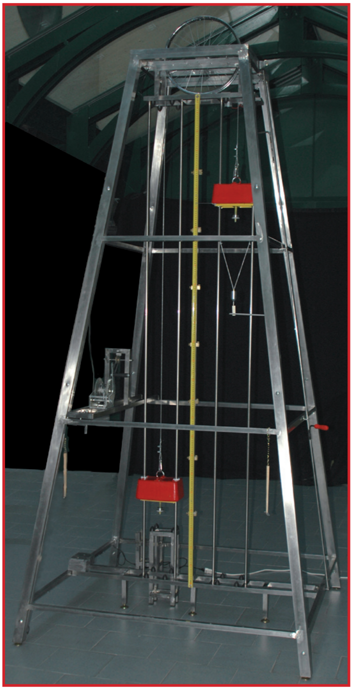


fig. 1

È una macchina di grandi proporzioni (è alta circa 3 metri) ma di semplice costruzione, consistente in una struttura piramidale a base quadrata, i cui lati sono realizzati con tubi di acciaio inox, opportunamente collegati. La struttura costituisce un solido supporto per una ruota di bicicletta dal diametro 42 cm, sorretta da un telaio fissato sopra la struttura piramidale (**fig. 1**).

Due pesi[23], M_1 (a sinistra) e M_2 (a destra) di massa uguale a 20,732 kg, sono uniti tra loro con un cavo di acciaio di diametro 3 mm. Il cavo passa nella

18 Le due masse utilizzate nella macchina erano in origine due pesi omologati di 20 kg, in uso per le grandi bilance commerciali. Le modifiche e le aggiunte per le finalità della macchina le hanno portate ad avere la massa finale qui indicata.

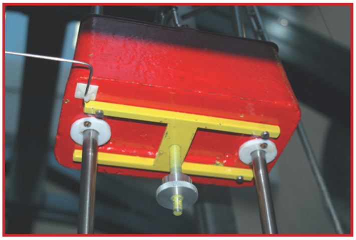


fig. 2

fig. 3

scanalatura della ruota ed ha lunghezza giusta per permettere la massima corsa al sistema dei pesi accoppiati. Ad entrambi i pesi, che all'incirca sono a forma di parallelepipedo, sono stati praticati due fori perché scorrano lungo due tubi di acciaio paralleli che fanno da guida. Ad ogni peso è stata avvitata superiormente una piastra in ferro con un anello saldato al centro che lo sostiene in maniera equilibrata, facilitando lo scorrimento. Una traversa, con vite al centro, è fissata sotto i pesi per aggiungere altro carico ad ognuno di essi (**fig.2**).

Alla base della struttura è inserito un telaio (**fig. 3**) per mettere in posizione M_1 all'inizio degli esperimenti e per bloccare M_2 a fine corsa (e viceversa).

Al centro della macchina vi è un'asta

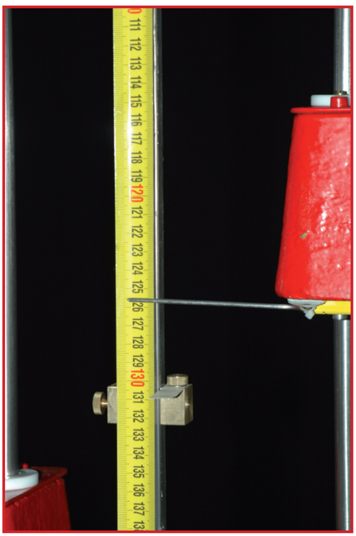


fig. 4

fig. 5

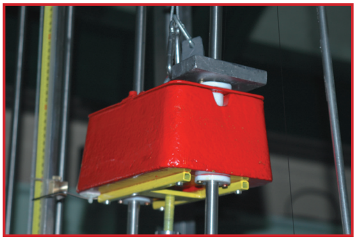


fig. 6

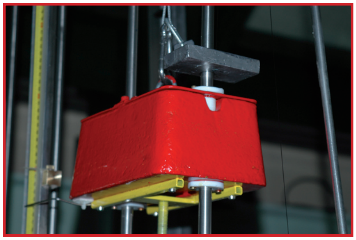


fig. 7

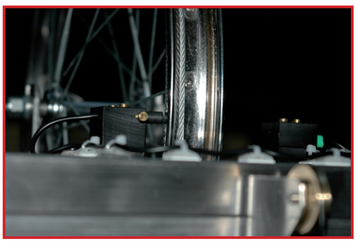


fig. 8

verticale, al centro della macchina, su cui è fissata una scala millimetrica lunga 2,6 metri, che serve per misurare lo spazio percorso da M_2. Alla base di M_2 è stata fissata un'asticella, sporgente verso la scala millimetrica, per la lettura esatta della sua posizione (**fig. 4**).

Lungo l'asta verticale sono sistemati sette ponticelli scorrevoli in ottone che sostengono i traguardi in carta pergamenata, distanti 30 cm l'uno dall'altro: servono a evidenziare il passaggio della massa M_2 (**fig. 5**).

Una massa di piombo m_p (0.884 kg) scorre lungo il tubo esterno di guida della massa M_2 ed è tenuta ferma in alto con un filo, che passa in una carrucola e si aggancia ad un fermo della struttura laterale. Serve per imprimere una opportuna velocità iniziale ad M_2 nell'esperimento sul principio di inerzia (**fig. 6 e 7**).

Nella parte frontale della struttura è stato applicato un pendolo, che intercetta un traguardo di carta pergamenata). Il pendolo, ricavato da un filo a piombo, batte il secondo.

Accessori per l'esperimento della percossa

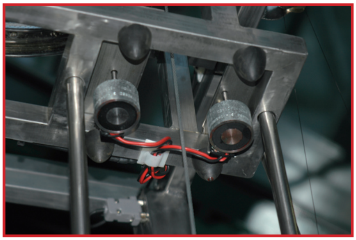


fig. 9

Un sensore vicino alla ruota si attiva al passaggio dei raggi e permette di misurare velocità ed accelerazione dei pesi nei vari esperimenti, in funzione della distanza percorsa (**fig. 8**). Il sensore è collegato ad un computer.

Nell'esperimento si utilizzano due elettromagneti (fissati nella parte destra del telaio che sostiene la ruota), situati proprio sopra il peso M_2 che viene sospeso ad essi all'inizio dell'esperimento (**fig. 9**).

Inizialmente con M_1 nel punto più basso, si attivano gli elettromagneti e si porta in contatto con loro M_2, che rimane attaccato ad essi, rendendo possibile il sollevamento di M_1. Un fermo, azionato a mano, deve essere inserito sotto M_2 per impedirne la caduta nel caso di mancanza improvvisa di energia elettrica ai magneti. Il fermo viene tolto prima di dare inizio all'esperimento (**fig. 10**).

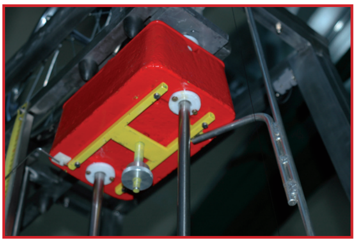


fig. 10

Per sollevare M_1 è stata costruita una struttura con verricello (**fig. 11**), che si deve appoggiare a metà altezza trasversalmente. Si alza M_1 ad altezza opportuna e sotto il peso s'inserisce un panchetto di acciaio, appositamente costruito; si abbassa, quindi, il peso, facendolo appoggiare

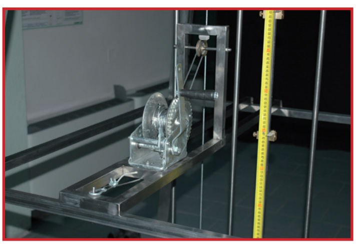


fig. 11

fig. 12

al panchetto con il verricello, che poi viene tolto (**fig. 12**).
Al peso M_2 rimane disponibile un percorso di caduta libera di 24 cm, che è l'altezza a cui è stato sollevato M_1. Si può avere una caduta più lunga inserendo nel panchetto un prolungamento: il percorso libero in questo caso diventa di 51 cm.
Disattivando gli elettromagneti, M_2 cade liberamente per la lunghezza disponibile e - quando la corda si tende - inizia a trascinare il peso che è sul banchetto.

Dati sugli elementi dinamici della macchina

Si utilizzano pesi standard di 20 kg (dimensioni: base cm 13x23 - altezza cm 12). Per la loro utilizzazione, ai pesi sono stati aggiunti alcuni elementi tecnici e il loro peso finale è:

M_1 (a sinistra) pesa 20,732 kg

M_2 (a destra) pesa 20,732 kg

Massa della corda d'acciaio per il collegamento dei pesi, compresi i moschettoni, M_{cavo} = 0,250 g.

Massa della ruota, che contribuisce al moto (valutazione): M = 1 kg

Massa aggiunta a M_2 per compensare l'attrito μ = 0,1 kg

Massa effettiva che viene messa in moto

$M_t = M_1 + M_2 + M + M_{cavo} + \mu$ $M_t = 42,814$ kg

Pesi aggiuntivi da avvitare a M_1 e M_2 per i vari esperimenti:

$m_1 = 0,500$ kg, $m_2 = 1,000$ kg, $m_3 = 1,982$ kg, $m_4 = 3,944$ kg

Discesa massima, appoggiando M_1 alla base $S = 2,384$ m

Discesa massima, fermando M_2 agli elettromagneti[24] $S = 2,400$ m

Discesa libera, prima della strappata (M_1 sul panchetto ed M_2 agli elettromagneti) $h = 0,256$ m

Formule utili per la misura dell'accelerazione di gravità g

Quando si aggiunge una massa addizionale m a M_2, si ha un moto accelerato, descritto dall'equazione:

$(M_1 + M_2 + M + M_{cavo} + \mu + m)a = mg$

Poiché l'inerzia della ruota non è trascurabile, l'equazione scalare che si deve usare è quella che uguaglia il momento della forza agente $T = mgR$ alla derivata del momento angolare L

$dL/dt = mgR$

Approssimiamo la ruota (di massa totale 1,180 kg) ad un anello di raggio R = 21 cm e di massa M. Il momento d'inerzia della ruota vale

24 Quando M_1 è sul panchetto, M_2 dista 1,6 cm dagli elettromagneti, pertanto quando viene attaccato ad essi vi è un aumento della discesa libera.

$I = MR^2$ e il momento angolare è $L_r = I\, v/R$ con v uguale alla velocità comune del cavo e del sistema delle masse (quando il cavo non slitta). Il momento angolare totale è quindi:

$$L_T = (M_1 + M_2 + M_{cavo} + \mu + m + I/R^2)\, vR$$

$$dL/dt = (M_1 + M_2 + M_{cavo} + \mu + m + M)\, R\, (dv/dt) = mgR$$

introducendo $M_T = M_1 + M_2 + M_{cavo} + \mu + M$

si ha per l'accelerazione

$$a = mgR\, /(M_T + m)$$

Si valuta M, che sarà certamente minore della massa della ruota, circa 1 kg.

Note

a) Se si vede che è importante lo spostamento della corda di acciaio, che inizialmente è tutta da una parte e poi si trasferisce, nel corso del moto, dall'altra parte, si ovvia all'inconveniente attaccando sotto i due pesi due spezzoni di corda sufficientemente lunghi, in maniera che dai due lati la parte sospesa della corda sia sempre uguale.
b) Si trova sperimentalmente la massa μ da aggiungere a M_2, perché il suo moto di discesa avvenga in modo uniforme, in modo da controbilanciare l'effetto degli attriti.

Primo esperimento: verifica della legge d'inerzia

…voglio poi che intendiamo una corda a cotal solido legata, la quale cavalchi sopra una carrucola fermata in alto, per buono spazio, sopra detto solido. Qui è manifesto, che aggiungendo forza traente in giù all'altro capo della corda, nel sollevar quel peso si averà sempre una egualissima resistenza, … quando da quest'altro capo si sospenda un altro solido egualmente pesante come il primo, verrà da essi fatto equilibrio; e stando sollevati, senza che sopra alcuno sottoposto sostegno si appoggino, staranno fermi, né scenderà questo secondo grave alzando il primo, salvo che quando egli abbia qualche eccesso di gravità.

…et in simile guisa i due pesi eguali, pendenti da' due capi della corda, ponendogliene in bilancio, si quieteranno, e se ad uno si darà impeto all'in giù[25], quello si andrà conservando equabile sempre. E qui si dee avvertire che tutte queste cose seguirebbero quando si movessero tutti gli esterni ed accidentari impedimenti, dico di asprezza e gravità di corda, di girelle e di stropicciamenti nel volgersi intorno al suo asse, ed altri che ve ne potessero essere.

In questo esperimento si verifica la legge di inerzia nella sua forma più generale: su ognuna delle due masse appese alla corda la risultante delle forze è nulla, pertanto ognuna di esse rimane ferma oppure, messa in moto, si muove con velocità costante. Il risultato è di grande valore storico, perché molti studiosi, in primo luogo Alexandre Koiré, attribuiscono a Galileo una formulazione approssimata della legge, una inerzia "circolare" limitata a percorsi "orizzontali" intesi come equidistanti dal centro della terra. Sono giudizi del tipo di quelli che seguono:

[…] Il risultato a cui giunge l'analisi galileiana è la persistenza naturale,

[25] Si noti che Galileo dice "all'in giù" perché in tal modo il peso spinto in giù tira su l'altro, rimanendo sempre nulla la risultante della forza di gravità. Qui la corda ha solo il compito di comunicare istantaneamente "l'impeto" all'altro peso.

o più esattamente, la situazione privilegiata del moto circolare[26].

[…] non può dimenticare che il piano orizzontale reale è una superficie sferica [27].

…In linea di principio, il carattere privilegiato del moto circolare è energicamente combattuto: è il movimento in quanto tale che si conserva, e non il moto circolare. In linea di principio. Ma, in realtà, il Dialogo non si spinge oltre. E checché se ne sia detto, non giungiamo mai, né mai giungeremo, fino al principio d'inerzia. Mai, nei Discorsi come nel Dialogo, Galileo affermerà la conservazione del moto rettilineo. Ciò per la semplice ragione che un tale movimento rettilineo dei gravi è una cosa impossibile, e che – per Galileo – dei corpi non gravi cesserebbero di esser corpi e non potrebbero muoversi affatto[28].

Operazione di messa a punto

L'esperimento ha inizio con M_1 in basso e M_2 in alto a inizio corsa; essi sono in equilibro.
Si mette in moto il sistema con una discreta spinta iniziale e si verifica che la velocità rimane visibilmente costante lungo il percorso (grande quantità di moto).
Si spinge leggermente M_1 verso l'alto (piccola quantità di moto).
S'instaura un lento moto che tende a fermarsi, a causa dell'attrito, che non è sempre uguale lungo il percorso, soprattutto per il non perfetto parallelismo delle guide. Aggiungendo per tentativi un sovrappeso ad una delle masse, per esempio a M_2, possiamo controbilanciare l'attrito. Questa scelta obbliga ad usare la macchina solamente nel verso che fa scendere M_2. Il peso che sembra ottimale ha massa $\mu = 0{,}1$ kg. Si osserva un moto a velocità costante anche per piccole quantità di moto (ma non piccolissime, altrimenti il sistema tende ancora a fermarsi).

26 ALEXANDRE KOYRÉ, *Studi galileiani,* Torino, 1979, p.209

27 ALEXANDRE KOYRÉ, cit., pp.233.

28 ALEXANDRE KOYRÉ, cit., pp.242-243.

Un sensore intercetta il passaggio dei raggi della ruota. I segnali pervengono ad un computer che li elabora, traccia il grafico spazio *versus* tempo. Si può controllare così il comportamento della macchina prima e dopo aver aggiunto μ, calcolando velocità e decelerazione.

Esperimento

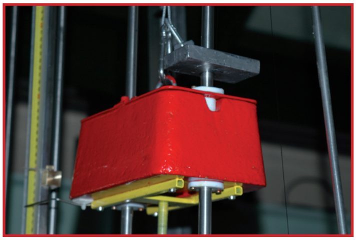


fig. 13

fig. 14

Un peso m_p, che è attaccato superiormente alla struttura della macchina mediante una cordicella lunga 0,24 m metri, viene appoggiato sopra la massa M_2. Si porta M_1 al punto punto più basso, si attivano gli elettromagneti, si attacca ad essi M_2 che poi è lasciato andare. Il sistema acquista velocità crescente, durante il primo tratto di discesa di M_2, cioè fino al momento in cui la cordicella si tende e m_p si stacca da M_2 (**fig. 13**). Si può così imprimere sempre la stessa velocità al sistema, e studiare il moto della massa M_2, sulla quale è nulla la risultante delle forze lungo il percorso ancora disponibile. Le distanze e i pesi sono stati aggiustati in modo che lasciando cadere M_2 quando il pendolo intercetta il proprio traguardo, il tempo impiegato da M_2 a percorrere in caduta libera 24 cm e arrivare al primo traguardo è esattamente un secondo, il periodo del pendolo. Subito dopo, mp si stacca e M_2 continua con velocità costante. La

velocità impressa dalla massa m_p a M_2 è esattamente quella necessaria a percorrere in un secondo 30 cm, la distanza che separa due traguardi successivi dell'asta,
Ricordando che un'oscillazione completa del pendolo dura un secondo, i successivi passaggi di M_2 nei traguardi si compiono in sincronia con queste oscillazioni (**fig. 14**).
Per meglio evidenziare il passaggio simultaneo della massa M_2 e del pendolo nei rispettivi traguardi, vi sono due martelletti, che devono essere azionati da due osservatori, ai quali è affidato il compito di controllare questi passaggi.

Studio di fattibilità da parte di Galileo

L'ultima parte dell'esperimento che ho illustrato, procede con la stessa metodologia già seguita sul piano inclinato per provare la legge dei numeri dispari; in questo caso quello che viene verificato è la legge d'inerzia. Non si può sapere se Galileo abbia effettuato l'esperimento in questa maniera, ma ritengo che in qualche modo abbia controllato la veridicità di questa legge fondamentale che proclama con decisione: «*se ad uno si darà impeto all'in giù, quello si andrà conservando equabile sempre*».
Galileo si è accorto anche dell'attrito, come risulta da quanto mette in bocca a Sagredo:

> "Dirò dunque (però sempre dubitando) che è vero che il peso, e.g., delle 100 libbre, del grave discendente basta per alzare l'altro, che pure pesi 100 libbre, infino allo equilibrio, senza che quello venga instrutto e fornito d'altra velocità e basterà solo l'eccesso di mezza oncia, ma vo considerando che questa equilibrazione verrà fatta con gran tardità …"

Galileo dopo l'aggiunta di mezza oncia (0,014 kg) alle 100 libbre (33,95 kg) dice di aver osservato un processo di "equilibrazione", cioè una lentissima discesa che terminava nell'equilibrio, nella quiete. Questa sua osservazione ha un interesse notevole, perché assicura che l'attrito presente nella "sua macchina" non era molto differente dall'attrito osservato nella macchina odierna.

Secondo esperimento: il moto accelerato, la massa inerziale e la determinazione di g

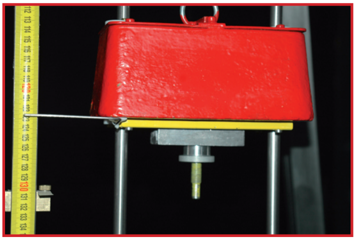


fig. 15

…né scenderà questo secondo grave alzando il primo, salvo che quando egli abbia qualche eccesso di gravità
…l'operazione della gravità nel sollevar l'altro è nulla, avendo a sé opposta e renitente altrattanta gravità dell'altro peso, il quale è manifesto che mosso non sarebbe senza l'aggiunta all'altro di qualche piccola gravità.

Si aggiunge una massa m_i alla massa M_2 di destra, si abbassa l'altra massa M_1, fino a farla giungere al punto più basso. Si lascia libera la massa M_1: se m_i è molto minore di M_t si osserva un moto uniformemente accelerato, con piccola accelerazione (**fig. 15**).
Si misura il tempo necessario ad arrivare a fine corsa e si determina l'accelerazione "a" dall'equazione del moto (conoscendo lo spazio S):

$S = (1/2)\,at^2$

Si calcola il valore sperimentale, g', dell'accelerazione di gravità, ottenuto dagli esperimenti eseguiti con la macchina, secondo l'espressione:

$g' = (M_t + m_i)a/m_i$

Si confronta g' con il valore medio dell'accelerazione di gravità:

$g = 9{,}8\ ms^{-2}$

Se la massa M_1 è appoggiata alla base, lo spazio percorso è sempre:

$S = 2{,}384$ m

Se invece si usano gli elettromagneti, che sono leggermente più in alto, il percorso è

$S = 2{,}400$ m

La massa totale in moto è $(M_t + m)$, dove $M_t = M_1 + M_2 + M + M_{cavo} + \mu$. Si trascura la variabilità della massa M_{cavo}, il cui effetto non è grande.

$S = (1/2)a\, t^2$

$S = (1/2)\, t^2\, g' m_i\, /(M_t + m_i)$

$g' = 2S\, (M_t + m_i)/m_i\, t^2 = 2 \times 2{,}384\, (42{,}806 + m_i)\, /\, m_i\, t^2$

$g' = 4{,}768(42{,}806 + m_i)\, /\, m_i\, t^2$

Per $m_1 = 0{,}5$ kg

$g' = 2 \times 2{,}384 \times 43{,}306\, /\, 0{,}5\, t_1^2$

misure di t_1: {6.74; 6.69; 6.73; 6.79; 6.74; 6.76; 6.69; 6.73; 6.63; 6.62}

valor medio $t_1 = 6{,}71$ $t_1^2 = 45{,}024$

$g' = 412{,}966/45{,}024$ **$g' = 9{,}17\ ms^{-2}$**

Si ripete con il sovrappeso $m_2 = 1$ kg

$g' = 2 \times 2{,}384 \times 43{,}805/\, t_2^2$

misura di t_2: {4.69; 4.63; 4.64; 4.67; 4.69; 4.69; 4.62; 4.61; 4.68; 4.65 }

valor medio $t_2 = 4{,}66$ $t_2^2 = 21{,}716$

$g' = 208,862 / 21,716$ **$g' = 9,62\ ms^{-2}$**

Ad ogni misura diretta, il computer, in tempo reale, traccia il grafico spazio *versus* tempo e calcola l'accelerazione con altissima precisione.

Si ripete con i due soprappesi insieme: $m_1 + m_2 = 1,5$ kg
Per l'esperimento non è opportuno utilizzare la sospensione con i magneti, non tanto perché si ha un leggero aumento del percorso di caduta (2.400 m) ma perché falsa i risultati, in quanto gli elettromagneti, al momento della chiusura della corrente per il distacco, impartiscono una spinta al peso ed quindi una velocità iniziale, che porta ad una diminuzione del tempo di percorso e ad un g' troppo grande.
In quest'ultimo esperimento la massa totale è stata leggermente aumentata, perché si è aggiunto l'asticella segna posizione al peso $M_{2.}$
Si prendono i tempi di caduta:

t={3.88; 3.90; 3.91; 3.79; 3.84; 3.81; 3.83; 3.86; 4.84; 3.84}

valor medio t = 3,85 s

$g' = 2S\ (M_t + m_i)/m_i\ t^2 = 2 \times 2,384 \times 44,314/(1,5 \times 14,82)$

$g' = 9,50\ ms^{-2}$

Studio della fattibilità da parte di Galileo

Galileo ha preso in considerazione il fatto che un gran peso può essere messo in moto da un piccolo peso. Non sappiamo però se ha fatto misure precise o se le sue osservazioni sono state solo qualitative.
Lo studio del moto accelerato, dovuto a "un qualche eccesso di gravità", suggerisce l'applicazione di piccole masse ad M_2. Quando lo facciamo, troviamo che il quadrato del tempo in cui lo spazio S è percorso decresce, in maniera inversamente proporzionale all'aumento del peso aggiuntivo. Infatti, per $m_1/m_2 = 0{,}5$ si ha $(t_2/t_1)^2 = 0{,}48$; per $m_3/m_2 = 0{,}67$ si ha $(t_3/t_2)^2 = 0{,}68$.
Galileo dispone dell'orologio ad acqua, che ha una precisione superiore a 1/10 di secondo, precisione che con un poco di esperienza può essere portata a 1/20 di secondo. Non può quindi dubitare delle sue misure di tempo.
Galileo si trova con una macchina in cui il grave scende con moto accelerato ma in una maniera affievolita, una situazione simile a quella del piano inclinato. Adesso, però, non è la forza della gravità ad essere ridotta, il rallentamento della caduta, nella macchina di Galileo, non può più essere spiegato con la riduzione della forza a causa dell'appoggio sul piano inclinato. Ciò che resiste, lo dice spesso Galileo, è sempre il peso totale, il peso di tutto il sistema, che deve essere messo in moto.
Non sembra arduo il passo da fare, e noi abbiamo ipotizzato che l'esperimento, se lo ha fatto, lo avrebbe portato molto probabilmente alla formula di riduzione dell'accelerazione:

$$a = gm_i /(M_t + m_i)$$

e all'equazione del moto

$$(M_t + m_i)S(t) = gt^2/2$$

Terzo esperimento: la conservazione della quantità di moto al momento della strappata (masse uguali)

> Figuriamoci di fare la prima esperienza col far cadere da qualche altezza, diciamo di un braccio, un peso eguale all'altro, che ponghiamo posare sopra un piano essendo ambedue tali pesi legati l'uno all'un capo e l'altro all'altro capo dell'istessa corda; che crediamo noi che sia per operare la strappata del peso cadente circa il muovere e sollevar l'altro, che era in quiete? Io volentieri sentirei l'opinione vostra…
> … Ma perché si è fatta considerazione della velocità, la quale l'uno de' due pesi acquista scendendo da qualche altezza, mentre l'altro posi in quiete, è bene determinare quale e quanta sia per essere la velocità colla quale sieno per muoversi poi amendue, dopo la caduta dell'uno, scendendo questo e salendo quello Già, per le cose dimostrate, noi sappiamo che quel grave che partendosi dalla quiete liberamente scende, acquista tuttavia maggiore e maggior grado di velocità perpetuamente; sicché, nel caso nostro, il grado massimo di velocità del grave, mentre liberamente scende, è quel che si trova avere nel punto che egli comincia a sollevare il suo compagno; ed è manifesto che tal grado di velocità non si andrà piu augumentando, essendo tolta la cagione dello augumento, che era la gravità propria di esso grave descendente, la quale non opera più, essendo tolta la sua propensione di scendere dalla ripugnanza del salire di altrettanto peso del suo compagno. Si conserverà dunque il detto grado massimo di velocità, ed il moto, di accelerato, si convertirà in equabile: quale poi sia per essere la futura velocità, è manifesto dalle cose dimostrate e vedute ne' passati giorni, cioè che la velocità futura sarà tale, che in altrettanto tempo quanto fu quello della scesa, si passerà doppio spazio di quello della caduta.

Per comprendere l'ultima affermazione, ricordo il teorema a cui fa riferimento Galileo:

> Se, dopo la caduta lungo un piano inclinato, il moto procede sul piano dell'orizzonte, il tempo della caduta lungo il piano inclinato starà al tempo del moto lungo un qualsiasi tratto dell'orizzonte, come il doppio della lunghezza del piano inclinato sta al tratto orizzontale

preso[29].

Galileo assimila il moto dell'esperimento alla discesa lungo un piano inclinato, dove pure l'accelerazione è ridotta, e il moto inerziale dopo la strappata al moto inerziale sul piano orizzontale. Nel nostro caso, essendo il tempo lo stesso nei due tratti (*in altrettanto tempo quanto fu quello della scesa*), ne segue la relazione $S_u = 2h$ (dove h è lo spazio percorso da M_2 prima della strappata). Dividendo per lo stesso tempo i due percorsi, si ottiene la relazione tra la velocità costante $v' = S_u/t = 2h/t$ dopo la strappata e la velocità v di M_2 al momento della strappata.
Poiché nel moto accelerato la velocità finale è $v = gt = (2gh)^{1/2}$ (essendo $h=(1/2)gt^2$) si ha:

$$v' = 2h/t = 2gh/v = v^2/v = v$$

Abbiamo visto, invece, che si deve avere $v' = v/2$.

L'esperimento si esegue in questo modo: si porta il peso M_1 in basso fino a farlo poggiare sul supporto, in maniera da sollevare il peso M_2 fino a metterlo in contatto con gli elettromagneti. Si attivano gli elettromagneti. M_2 rimane sospeso. Si mette in sicurezza il peso M_2 inserendo manualmente la leva di blocco. Si sistema il verricello e si alza M_1 in modo da inserire sotto di esso lo sgabello. Si appoggia M_1 allo sgabello, che lo tiene sollevato 24 cm dal punto di partenza, e si toglie il verricello. Si toglie manualmente la leva che blocca il peso M_2. Si staccano gli elettromagneti, sganciando il peso M_2 e si osserva il movimento verso il basso che si viene ad instaurare. La velocità v_{2f} raggiunta da M_2 al momento immediatamente prima della strappata, dopo una caduta libera per 25,6 cm, quando il cavo si tende e M_1 inizia a muoversi, diviene v_c = costante, con il moto congiunto e uniforme di M_1 e M_2.

[29] G.G. vol. VIII, pp. 246-247, Giornata terza dei «*Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a due nuove Scienze*…», Teorema 16, proposizione 25.

Misure

Sono state realizzate misure del tempo di caduta a velocità costante con un cronometro manuale. Il tempo per scendere a velocità costante, percorrendo lo spazio rimanente che è 2,144 metri, dopo la caduta di 0,24 m, (media di tre misure), è:

$T = (2{,}07 + 2{,}12 + 2{,}08 + 2{,}13 + 2{,}06)/5 = 2.09$ s

e la velocità è

$v_c = 2{,}16/2{,}09$ **$v_c = 1{,}03$ ms^{-1}**

Si valuta la caduta libera di 0,256 metri.

La velocità finale è data da $v = (2gh)^{1/2}$

$v_{2f} = 2\,v_c = (2 \times 9{,}81 \times 0{,}256)^{1/2}$ **$v_{2f} = 2{,}24$ ms^{-1}**

Si trova che vale, con buona approssimazione, la relazione

$M_2 v_{2f} = (M_1 + M_2)\, v_c$

Infatti abbiamo

$M_1 = M_2 = 20{,}732$ kg

$v_{2f} / 2 = 1{,}12$ ms^{-1} da confrontare con $v_c = 1{,}03$ ms^{-1}

Studio della fattibilità da parte di Galileo

Esattamente come nell'esperimento precedente, sappiamo che Galileo non aveva difficoltà a misurare il tempo: la precisione del suo apparecchio (l'orologio ad acqua) non è lontana da quella che abbiamo oggi con i nostri cronometri.
Non sappiamo se abbia fatto esperimenti del genere a Padova; se li aveva fatti, non ricordava più con esattezza i risultati. L'affermazione errata di Galileo sulla velocità finale suggerisce che egli non ha fatto personalmente l'esperimento ad Arcetri. Non sono purtroppo rimasti appunti riferibili alla macchina e ai suoi esperimenti. Aveva, allora, circa 74 anni e cominciava a non vederci più mentre faceva scrivere la nuova giornata *sulla forza della percossa* al sacerdote Marco Ambrogetti, che gli era stato vicino tra il 1637 e il 1638 e che poteva averlo aiutato negli esperimenti, insieme al servitore Pier Ferri.
Non poteva certo fare o rifare lui stesso gli esperimenti, per i quali bastava avere una carrucola e qualche attrezzatura, ma che richiedevano lo spostamento di pesi molto grandi, e non sappiamo se, nei suoi ultimi anni di vita, vi fosse ad Arcetri qualcun'altro che potesse farli per lui, o così bene come lui.
Doveva dare una valutazione della velocità finale. Galileo ha creduto di poter applicare un teorema, che nel caso specifico non è valido, perché la massa che scende con moto accelerato è la metà della massa che procede in moto uniforme.
Lasciando da parte ogni incerta giustificazione, quello che oggi mi sento in condizione di poter affermare con sicurezza è che questo esperimento e il successivo potevano essere fatti facilmente dal grande scienziato. Non voglio, anzi, nascondere un dubbio: qualcuno deve aver misurato, dopo il 1632, l'accelerazione di gravità "g" abbastanza bene da indurre Galileo a fare un'aggiunta in margine ad un esemplare[30] del *Dialogo sopra i due Massimi Sistemi del Mondo*,

[30] G.G., vol. VII, p. 54.

…«l'incredulità dell'esser necessario che quella gravissima palla di piombo di 100 libbre di peso, lasciata cadere da alto, partendosi dalla quiete passi per ogni altissimo grado di tardità, mentre si vede in quattro battute di polso aver passato più di 100 braccia.»

Una battuta di polso è meno di un secondo; più di 100 braccia potrebbero essere anche 60 metri. Insomma, l'accelerazione di gravità ha qui un valore ben diverso da $g = 4{,}6\ ms^{-2}$ risultante dall'affermazione: 100 braccia in 5 secondi, ripetuta nella lettera a Giovan Battista Baliani dell'1 agosto 1639. In questa lettera, però, Galileo sembra già mettere le mani avanti sull'affermazione fatta sette anni prima:

…ancorché poi volendo sperimentare se quello che io scrissi delle 100 braccia in cinque secondi sia vero, lo trovasse falso, perché per manifestare la estrema gofferia di quello che scriveva et assegnava il tempo della caduta della palla d'artiglieria dall'orbe lunare, poco importa che i cinque minuti delle 100 braccia siano o non siano giusti.

E poi la palla di piombo che pesa proprio 100 libbre come i pesi della sua macchina!
Siamo, nell'appunto in margine alla copia del *Dialogo* …, in un intervallo di valori che oscilla tra $g = 60/3{,}5 = 9{,}8\ ms^{-2}$ a $g = 58/3{,}7 = 8{,}5\ ms^{-2}$, risultato ottimo, superato solo da Christiaan Huygens, che nel 1659 trovò la maniera di misurare g con grande esattezza.[31]

31 Huygens, nel dicembre del 1659, trovò che una sfera percorreva in caduta libera in un secondo 31,5 piedi del Reno, ossia 9,81 m. CHRISTIAAN HUYGENS, *Oevres complétes*, Le Haye 1932, vol. XVII pp. 245-247 e 278-284.

Quarto esperimento: la conservazione della quantità di moto al momento della strappata (masse differenti, $M_1 + m > M_2$)

> …e se riposeremo il primo peso sopra il soggetto piano, che lo sostenga, potremo far prova con altri pesi di diversa gravità (ma ciascuno minore del peso che riposa in quiete) quali siano le forze di diverse percosse, con legare alcuni di detti pesi all'altro capo della corda, lasciando da qualche altezza cadere ed osservando quel che segue nell'altro gran solido nel sentire la strappata dell'altro peso cadente, la quale strappata sarà ad esso gran peso come un colpo che lo voglia cacciare in su.

Si ripete l'esperimento precedente, aggiungendo una massa m ad M_1.
Il moto adesso – dopo la *strappata* - è uniformemente ritardato.
Perché la conservazione della quantità di moto sia verificata, al momento della strappata, occorre che la velocità v_c del sistema accoppiato, di massa

$$M_t = M_1+M_2+M+M_{cavo}+\mu,$$

verifichi la relazione:

$$M_2 v_{2f} = M_t v_c$$

v_{2f} è uguale al valore $(2gh)^{1/2}$ ottenuto nell'esperienza precedente.

$v_{2f} = (2gh)^{1/2} = (2 \times 9{,}81 \times 0{,}256)^{1/2}$ **$v_{2f} = 2{,}24\ ms^{-1}$**

Per misurare sperimentalmente v_c occorre studiare il moto ritardato con velocità iniziale v_c.
Si è visto che esiste una relazione tra velocità v raggiunta in caduta libera e altezza h della caduta

$$v = (2gh)^{1/2}$$

Galileo ha più volte affermato che questa relazione è invertibile, cioè che un grave lanciato verso l'alto con velocità v raggiunge un'altezza massima h data dalla stessa formula

$h = (v^2)/2g$

La stessa regola vale anche lungo un piano inclinato di un angolo θ, che continuasse con un altro simmetrico, a cui è collegato con un piccolo raccordo curvo. In questo caso l'altezza dipende dall'accelerazione effettiva, lungo il piano inclinato, $a = g\text{sen}\theta$
Nel caso della macchina di Galileo l'accelerazione effettiva è

$a = mg/ M_t$

Da tutto ciò segue la relazione tra velocità iniziale del sistema (e quindi di ognuna delle due masse) e lo spazio S_d percorso verso l'alto da M_2 e verso il basso da M_1 è dato dalla relazione:

$S_d = (v_c{}^2)/2a = (v_c{}^2/2)\ M_t/mg$

e quindi

$v_c = (2gmS/ M_t)^{1/2}$

Se si ha la conservazione della quantità di moto, si può valutare v_c

$v_c = M_2 v_{2f} /M_t = (M_2/M_t)\ (2gh)^{1/2}$

$v_c = [20{,}732 /(42{,}814 + m)]\ (2 \times 9{,}81 \times 0{,}256)^{1/2}$

$v_c = 2{,}24[20{,}732/(42{,}814 + m)] = 46{,}44 /(42{,}814 + m)$

1° esperimento - $m_2 = 1$ kg

Si misura S_d

$S_d = 2{,}16$ m

da cui ricaviamo un valore *sperimentale per v_c*

$v_{c\,=}$ 0,98 ms^{-1}

{ $v_c = (2 \times 9{,}81\ S\ /43{,}814)^{1/2} = 0{,}669\ S^{1/2} = 0{,}98$ }

La legge di conservazione della quantità di moto richiede

$M_2 v_{2f} = M_t\, v_c$

e dato che $v_{2f} = 2{,}24\ ms^{-1}$ risulta un *valore teorico*

$v_c^{(teo)} = 1{,}06\ ms^{-1}$

{ $v_c = M_2 v_{2f} / M_t = 46{,}44\ /43{,}814 = 44{,}988/43{,}814 = 1{,}06$ }

2° esperimento - $m_3 = 1{,}982$ kg

Si misura S_d

$S_d = 1{,}052$ m

e quindi ricaviamo un *valore sperimentale per v_c*

$v_c^{(teo)} = 1{,}04\ ms^{-1}$

{ $v_c = (2 \times 9{,}81\ S/44{,}796)^{1/2} = 0{,}662\ S^{1/2} = 0{,}662 \times 1{,}026$ }

da confrontare con *quello teorico*

$\mathbf{v_c = 1{,}04\ ms^{-1}}$

{ $v_c = M_2 v_{2f} / M_t = 46{,}44 / 44{,}796 = 1{,}04\ ms^{-1}$ }

<u>*3° esperimento*</u> - $m_4 = 3{,}944$ kg

si misura S_d

$S_d = 0{,}563$ m

da cui il *valore sperimentale*

$\mathbf{v_c = 0{,}96\ ms^{-1}}$

{ $v_c = (2 \times 9{,}81 \times 3{,}944\ S/46{,}758)^{1/2} = 1{,}286\ S^{1/2} = 1{,}286 \times 0{,}750$ }

da confrontare con il *valore teorico*

$\mathbf{v_c^{(teo)} = 0{,}99\ ms^{-1}}$

{ $v_c = M_2 v_{2f} / M_t = 46{,}44 / 46{,}758 = 0{,}99\ ms^{-1}$ }

Misure con la telecamera

I tempi ricavati al computer dalla ripresa video hanno un'incertezza di 0.04 secondi.

$a = mg / M_t$

I prova) pesi differenti - **sovrappeso di 1kg**

sgancio: 0 s
colpo: 0,20 s
tempo dalla *strappata* per arrivare a fine corsa: 4,04 s

$a = 9{,}81/44{,}796 = 0.224\ ms^{-2}$

$v_c = 0{,}224 \times 4{,}04$ **$v_c = 0{,}91\ ms^{-1}$**

II prova) pesi differenti - **sovrappeso di 1,982 kg**

sgancio: 0 s
colpo: 0,24 s
tempo dalla *strappata* per arrivare a fine corsa: 2,08 s

$a = 9{,}81 \times 1{,}982/43.814 = 0.444\ ms^{-2}$

$v_c = 0{,}444 \times 2{,}08$ **$v_c = 0{,}92\ ms^{-1}$**

III prova) pesi differenti - **sovrappeso di 3,944 kg**

sgancio: 0 s
colpo: 0,24 s
tempo dalla *strappata* per arrivare a fine corsa: 1,12 s

$a = 9{,}81 \times 3{,}944/46.758 = 0.827\ ms^{-2}$

$v_c = 0{,}827 \times 1{,}12$ $\mathbf{v_c = 0{,}93\ ms^{-1}}$

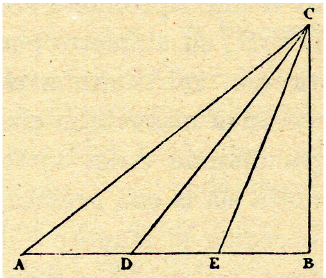
$v_{2f} = 9{,}81 \times 0{,}2$ $\mathbf{v_{2f} = 1{,}96\ ms^{-1}}$

La velocità misurata subito prima della *strappata* è sempre circa il doppio di quella misurata subito dopo la *strappata*

La fattibilità di questo esperimento non presenta alcun problema.

Conclusione

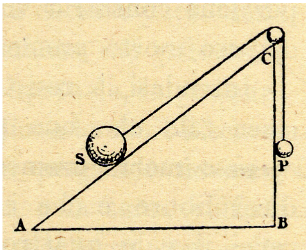
Ecco come Galileo ha riassunto tutta la situazione sul finire della Sesta Giornata dei *Discorsi*:



Inoltre è necessario che ci riduchiamo a memoria alcune conclusioni vere, delle quali si parlò a' giorni passati nel trattato del moto: e sia la prima di esse, che i gravi discendenti da un punto sublime sino a un soggetto piano orizontale, acquistano eguali gradi di velocità, sia la scesa loro fatta o nella perpendicolare o sopra qualsivogliano piani diversamente inclinati; come, per esempio, essendo AB un piano orizontale, sopra il quale dal punto C caschi la perpendicolare CB, e dal medesimo C altre diversamente inclinate CA, CD, CE, dobbiamo intendere, i gradi di velocità de' cadenti dal punto sublime C per qualsivoglia delle linee che dal punto C vanno a terminare nell'orizontale, essere tutti eguali.

Inoltre si dee, nel secondo luogo, supporre, l'impeto acquistato in A dal cadente dal punto C esser tanto, quanto appunto si ricercherebbe per cacciare in alto il medesimo cadente, o altro a lui eguale, sino alla medesima altezza; onde possiamo intendere che tanta forza bisogna per sollevare dall'orizonte sino all'altezza C l'istesso grave, venga egli cacciato da qualsivoglia de' punti A, D, E, B. Riduchiamoci, nel terzo luogo, a memoria, che i tempi delle scese per i notati piani inclinati hanno tra di loro la medesima proporzione che le lunghezze di essi piani; sicché quando, per esempio, il piano AC fusse lungo il doppio del CE e quadruplo del CB, il tempo della scesa per CA sarebbe doppio del tempo per la scesa per CE e quadruplo della caduta per CB. Inoltre ricordiamoci che per far montare, o vogliam dire strascicare, l'istesso peso sopra i diversi piani inclinati, sempre minor forza basta per muoverlo sopra il più inclinato che sopra il meno, secondo che la lunghezza di questo è minore della lunghezza di quello. Ora, stante questi veri supposti, finghiamo il piano AC esser, v.g., dieci volte più lungo del perpendicolo CB, e sopra esso AC esser posato un solido S, pesante 100 libbre: è manifesto che se a tal solido fusse attaccata una corda, la quale cavalcasse sopra una girella posta più alta del punto C, la qual corda nell'altro suo capo avesse attaccato un peso di 10 libbre,

qual sarebbe il peso P, è manifesto che tal peso P, con ogni poco di giunta di forza, scendendo, tirerebbe il grave S sopra il piano AC.
E qui si dee notare, che sebbene lo spazio per lo quale il maggior peso si muove sopra il suo piano soggetto è eguale allo spazio per lo quale si muove il piccolo discendente (onde alcuno potrebbe dubitare sopra la generale verità di tutte le meccaniche proposizioni, cioè che piccola forza non supera e muove gran resistenza se non quando il moto di quella eccede il moto di questa colla proporzione



contrariamente rispondente a i pesi loro), nel presente caso la scesa del piccolo peso, che è a perpendicolo, si dee paragonare colla salita a perpendicolo del gran solido S, vedendo quanto egli dalla orizzontale perpendicolarmente si solleva, cioè si dee riguardare quanto ei monta nella perpendicolare BC.

La macchina di Galileo è dunque una naturale evoluzione del piano inclinato.
Sul piano inclinato, munito di carrucola il rapporto tra le masse S ed P è tale che la forza di gravità e i vincoli (filo che collega le due masse e piano inclinato) agiscono su di esse in maniera da conservarle in equilibrio, se stanno ferme. Infatti, vale la relazione:

$$M_F / M_E = BC/AC = \text{sen}\varphi$$

Se spingiamo in basso il corpo F, le due masse si muoveranno con la stessa velocità costante, ognuna delle due in moto rettilineo uniforme. È il principio di inerzia generalizzato. Se però aggiungiamo ad S un sovrappeso μg, il moto generato da questa piccola forza non è più quello che la massa μ avrebbe sul piano inclinato, e questo fatto porta a scrivere, al posto di $x(t) = (1/2)g\text{sen}\varphi\ t^2$, la seguente espressione:

$$(m + m\ \text{sen}\varphi + \mu)\ x(t) = (1/2)(\mu\ g\ \text{sen}\varphi)\ t^2$$

Questi esperimenti possono essere realizzati con il piano inclinato con carrucola, un apparecchio che entrerà presto nel LABORATORIO DI GALILEO GALILEI.