LA MACCHINA DI GALILEI

Gli esperimenti del 7 novembre 2005[‡]

Roberto Vergara Caffarelli [†]

Istituto Nazionale di Fisica Nucleare - sezione di Pisa

10 febbraio 2010

[†] Gli esperimenti sono stati eseguiti con la collaborazione di Claudio Luperini e Stefano Gennai.

Introduzione.

Nella sesta giornata dei *Discorsi* [1a] Galileo (per bocca di Salviati) descrive una serie di esperimenti che ha ideato per studiare gli effetti di quella che chiama *La Forza della Percossa*. Gli esperimenti sono eseguiti utilizzando un'installazione che è così descritta ([1] pp. 332-333):

> …voglio che ci figuriamo un solido grave, per esempio di mille libre di peso[1], il quale posi sopra un piano che lo sostenti; voglio poi che intendiamo una corda a cotal solido legata, la quale cavalchi sopra una carrucola fermata in alto, per buono spazio, sopra detto solido. Qui è manifesto, che aggiungendo forza traente in giù all'altro capo della corda, nel sollevar quel peso si averà sempre una egualissima resistenza, cioè il contrasto di mille libre di gravità; e quando da quest'altro capo si sospenda un altro solido egualmente pesante come il primo, verrà da essi fatto equilibrio; e stando sollevati, senza che sopra alcuno sottoposto sostegno si appoggino, staranno fermi, né scenderà questo secondo grave alzando il primo, salvo che quando egli abbia qualche eccesso di gravità...

Qui Galileo ha già accennato a un primo esperimento: se a una delle due masse sospese e in equilibrio è aggiunta un'altra massa che le renda disuguali, si ha il moto.

Subito dopo aver descritto l'installazione, presenta un esperimento di grande interesse, che può essere visto come un urto tra corpi di massa diversa: è uno dei due esperimenti fondamentali in cui si ha la *strappata*, una particolare maniera di realizzare un urto non elastico [1b]:

> ...se riposeremo il primo peso sopra il soggetto piano, che lo sostenga, potremo far prova con altri pesi di diversa gravità (ma ciascuno minore del peso che riposa in quiete) quali siano le forze di diverse percosse, con legare alcuni di detti pesi all'altro capo della corda, lasciando da qualche altezza cadere ed osservando quel che segue nell'altro gran solido nel sentire la strappata dell'altro peso cadente, la quale strappata sarà ad esso gran peso come un colpo che lo voglia cacciare in su. […] Séguita ora che cerchiamo d'investigare, quanto sia per essere lo spazio al quale la ricevuta percossa lo solleverà, e se forse questo risponda a quello degli altri strumenti meccanici: come, per esempio, nella stadera si vede, l'alzamento del peso grave esser quella tal parte dello abbassamento del romano, quale è il peso del romano dell'altro peso maggiore; e così nel nostro caso bisogna che vediamo, se essendo la gravità del gran solido posto in quiete, per esempio, mille volte[2] maggiore della gravità del peso cadente, il quale caschi dall'altezza, v. g., di un braccio, egli sia alzato da questo minore un centesimo di braccio …

Qui Galileo fa riferimento a quanto aveva scritto nelle *Mecaniche* [2]:

---

[1] In seguito parlerà sempre di 100 libre, che sembra un peso più ragionevole. Infatti l00 libbre = 33,95 kg. La libbra toscana era divisa in 12 once; l'oncia era divisa in 24 denari; il denaro in 24 grani.

[2] In mancanza del manoscritto originale i richiami alla bilancia autorizzano qui a correggere 1000 in 100, anche perché alle masse sospese viene in seguito sempre dato questo valore.

qual meraviglia sarà, se quella potenza, che moveria per grande intervallo una picciola resistenza, ne spingerà una cento volte maggiore per la centesima parte di detto intervallo?»

e anche nel *Dialogo sopra i Massimi Sistemi* [3a]:

il muoversi poi lo spazio di cento dita il romano, nel tempo che la balla si muove per un sol dito, è l'istesso che 'l dire, esser la velocità del moto del romano cento volte maggiore della velocità del moto della balla.

Galilei ha capito la grande differenza che c'è tra i due esperimenti di strappata: nel primo intervengono la conservazione della quantità di moto e il principio d'inerzia mentre nel secondo il moto è contrastato dalla gravità; infatti, se indico con H l'altezza raggiunta dal peso maggiore M e con h l'altezza da cui cade il peso minore m, si ha $H = h/[M^2/m^2 -1]$ e allora, quando $M/m = 100$, il risultato è $H/h \approx 1/10$, mentre se M = m si avrebbe ritorneremmo al caso precedente del moto inerziale, con $H = \infty$ (ovviamente le masse non si possono muovere all'infinito e si fermano urtando i blocchi di fine percorso). Non sfugga a chi legge che lo studio della strappata è una assoluta novità nella prima metà del seicento, mentre adesso è solo un esercizio di meccanica del primo anno di un corso universitario della Facoltà di Scienze.

Immediatamente dopo aver trattato la *strappata* tra masse diverse, Galileo passa a studiare quella tra masse uguali [1c]:

Figuriamoci di fare la prima esperienza col far cadere da qualche altezza, diciamo di un braccio[3], un peso eguale all'altro, che ponghiamo posare sopra un piano essendo ambedue tali pesi legati l'uno all'un capo e l'altro all'altro capo dell'istessa corda; che crediamo noi che sia per operare la strappata del peso cadente circa il muovere e sollevar l'altro, che era in quiete? Io volentieri sentirei l'opinione vostra.

Quando le masse sospese sono uguali, il moto dopo la strappata è sempre *equabile* [1d]:

Ma nell'altro caso sopraggiugne il grave cadente al suo eguale, posto in quiete, non solamente con la velocità acquistata, ma colla sua gravità ancora, la quale, mantenendosi, leva per sé sola ogni resistenza di essere alzato all'altro suo compagno; perloché la velocità acquistata non trova contrasto di un grave che allo andare in su faccia resistenza, talché sì come l'impeto conferito all'in giù ad un grave non trova in esso ragione di annichilirsi o ritardarsi, così non si ritrova in quello ascendente, la cui gravità rimane nulla, essendo contrappesata da altrettanta discendente.

Qui Galileo coglie l'occasione del moto uniforme dopo la *strappata* per introdurre, prima di Newton, la generalizzazione del principio d'inerzia, paragonando il moto sul piano perfettamente orizzontale a quello verticale sulla *Macchina*, facendo chiaro che

[3] Nella prima metà del '600 per le distanze geografiche e astronomiche era ancora in uso a Firenze il braccio *a terra*, equivalente a 0,55063 cm, mentre per gli usi commerciali vi era il braccio *da panno*, equivalente a 0,58302 m. Quest'ultimo con il passare del tempo finì per prevalere fino a diventare nella seconda metà del settecento l'unica unità di misura di distanza con valore legale in tutto il Granducato.

il principio vale in ogni situazione in cui è nulla la risultante delle forze agenti sul corpo[1e]:

> E qui mi pare che accada per appunto quello che accade ad un mobile grave e perfettamente rotondo, il quale, se si porrà sopra un piano pulitissimo ed alquanto inclinato, da per sé stesso naturalmente vi scenderà, acquistando sempre velocità maggiore; ma se, per l'opposito, dalla parte bassa si vorrà quello cacciare in su, ci bisognerà conferirgli impeto, il quale si anderà sempre diminuendo e finalmente annichilando; ma se il piano non sarà inclinato, ma orizontale, tal solido rotondo, postovi sopra, farà quello che piacerà a noi, cioè, se ve lo metteremo in quiete, in quiete si conserverà, e dandogli impeto verso qualche parte, verso quella si moverà, conservando sempre l'istessa velocità che dalla nostra mano averà ricevuta, non avendo azione né di accrescerla né di scemarla, non essendo in tal piano né declività né acclività: et in simile guisa i due pesi eguali, pendenti da' due capi della corda, ponendogliene in bilancio, si quieteranno, e se ad uno si darà impeto all'in giù[4], quello si andrà conservando equabile sempre. E qui si dee avvertire che tutte queste cose seguirebbero quando si movessero tutti gli esterni ed accidentari impedimenti, dico di asprezza e gravità di corda, di girelle e di stropicciamenti nel volgersi intorno al suo asse, ed altri che ve ne potessero essere.

Nell'esperimento della *strappata* vi sono due fasi: prima si ha il moto accelerato di una sola massa sulla quale agisce la forza di gravità, poi - dopo la strappata - il moto uniforme delle due masse accoppiate, durante il quale la gravità annulla il suo effetto sulle due masse in moto perché agisce su entrambe in ugual modo. Il problema è adesso determinare la velocità comune delle due masse dopo la *strappata* [1f]:

> Ma perché si è fatta considerazione della velocità, la quale l'uno de' due pesi acquista scendendo da qualche altezza, mentre l'altro posi in quiete, è bene determinare quale e quanta sia per essere la velocità colla quale sieno per muoversi poi amendue, dopo la caduta dell'uno, scendendo questo e salendo quello. Già, per le cose dimostrate, noi sappiamo che quel grave che partendosi dalla quiete liberamente scende, acquista tuttavia maggiore e maggior grado di velocità perpetuamente; sicché, nel caso nostro, il grado massimo di velocità del grave, mentre liberamente scende, è quel che si trova avere nel punto che egli comincia a sollevare il suo compagno; ed è manifesto che tal grado di velocità non si andrà piu augumentando, essendo tolta la cagione dello augumento, che era la gravità propria di esso grave descendente, la quale non opera più, essendo tolta la sua propensione di scendere dalla ripugnanza del salire di altrettanto peso del suo compagno. Si conserverà dunque il detto grado massimo di velocità, ed il moto, di accelerato, si convertirà in equabile: quale poi sia per essere la futura velocità, è manifesto dalle cose dimostrate e vedute ne' passati giorni, cioè che la velocità futura sarà tale, che in altrettanto tempo quanto fu quella della scesa, si passerà doppio spazio di quello della caduta.

[4] Si noti che Galileo dice "all'in giù" perché in tal modo il peso spinto in giù tira su l'altro, rimanendo sempre nulla la risultante della forza di gravità. Qui la corda ha solo il compito di comunicare "l'impeto" all'altro peso.

Ho qui raccolto succintamente alcuni dei passi più rilevanti di questa straordinaria "Sesta Giornata", dove Galileo affronta quei problemi della dinamica che saranno oggetto di studio da parte dei suoi continuatori fino alla metà del secolo XVIII. Questo suo scritto, proprio perché è stato sottovalutato da tutti gli storici che si sono occupati di lui e in generale dagli studiosi della storia della dinamica, mi ha spinto a mettere in pratica quanto leggevo, cosicché nella seconda metà del 2005 ho iniziato la costruzione di una struttura atta a compiere gli esperimenti cosi accuratamente descritti da Galileo. All'installazione ho dato il nome di *MACCHINA DI GALILEI*, per sancire l'anteriorità della sua invenzione rispetto a quella di ATWOOD[5], per molti versi analoga.

La *Macchina*[6] è stata esposta al pubblico per la prima volta nel 2005 al Festival della Scienza di Genova, con un opuscolo illustrativo che ora è reperibile in internet [4].

Sempre nel 2005, in occasione dell'Anno Mondiale della Fisica, è stato prodotto dalla SIF il video IL LABORATORIO DI GALILEO GALILEI [5], disponibile in internet, nel quale sono illustrati molti esperimenti galileiani, realizzati da me servendomi di alcune installazioni costruite fedelmente secondo gli scritti galileiani; tra gli esperimenti vi sono anche quelli eseguiti con la *Macchina*.

In un libro recentemente pubblicato [6] ho descritto gli esperimenti compiuti con la versione definitiva della *Macchina*, accompagnandoli con l'esposizione e l'analisi dei testi galileiani relativi agli esperimenti.

Il presente lavoro trae la sua origine da una serie di prove eseguite quando la *Macchina* era nella fase iniziale della sua costruzione[7] e che, per questo, era ancora priva di una serie di accorgimenti, introdotti in seguito per rendere gli esperimenti più sicuri e più facilmente eseguibili in vista di una sua sistemazione museale.

Le prove - che possono essere eseguite da una sola persona - per la loro semplicità non sono molto differenti dagli esperimenti che Galileo descrive, realizzati con una semplice carrucola attaccata molto in alto e senza guide di sicurezza. Quei miei primi esperimenti furono ripresi con una videocamera amatoriale e i tre video sono stati recentemente introdotti in internet in PROVE DI FUNZIONAMENTO DELLA MACCHINA DI GALILEI [7] allo stesso indirizzo già indicato per il video della SIF, cosicché è possibile scaricarli e fare per proprio conto l'analisi con software appropriato, che permetta di contare i fotogrammi.

---

[5] ATWOOD GEORGE (1745-1807) nella sua opera più importante, *A Treatise on the Rectilinear Motion and Rotation of Bodies* (Cambridge 1784), descrisse una macchina per lo studio del moto uniformemente accelerato, poi costruita da Adams.

[6] Così sarà indicata d'ora in avanti *La Macchina di Galilei*.

[7] Come quasi tutte le mie installazioni, anche la *Macchina di Galilei* è stata realizzata da Stefano Gennai.

Descrizione della *Macchina*.

L'ambiente di lavoro è al piano terra del Dipartimento di Fisica dell'Università di Pisa. La *Macchina di Galilei* (foto 1) è stata appena costruita e non ha ancora ricevuto i successivi interventi che l'hanno perfezionata e che possono essere visti negli altri video e nelle pubblicazioni prima ricordate.

Foto 1

La *Macchina* è una struttura di grandi proporzioni (alta circa 3 metri) ma di semplice costruzione, consistente in una struttura piramidale a base quadrata, i cui lati sono realizzati con tubi a sezione quadrata di acciaio inox, opportunamente collegati.

La struttura costituisce un solido supporto per una ruota di bicicletta dal diametro di 42 cm, sorretta da un telaio fissato sopra la struttura piramidale.

Due pesi, di massa uguale a 19,903 kg, sono uniti tra loro con un cavo di acciaio di diametro 3 mm. Il cavo passa nella scanalatura della ruota ed ha lunghezza giusta per permettere la massima corsa nei due sensi al sistema dei pesi accoppiati.

Le due masse, M_1 (a sinistra) e M_2 (a destra), originariamente di 20 kg, hanno massa finale $M_1 = M_2 = (19{,}845 + 0{,}058)$ kg. Il primo numero misura la massa finale dei due blocchi, che è diminuita per i fori praticati per far passare i cavi di nylon che servono di guida. Il secondo numero misura la massa dell'anello (che si aggancia ai moschettoni del cavo di sospensione) e la massa dei due cavetti incrociati (in cui scorre l'anello). I cavetti permettono di centrare l'anello, stabilizzando orizzontalmente M_1 e M_2 ai quali sono avvitati (foto 2 e 3). In seguito questo sistema di sospensione è stato abbandonato a favore di altro più sicuro e preciso.

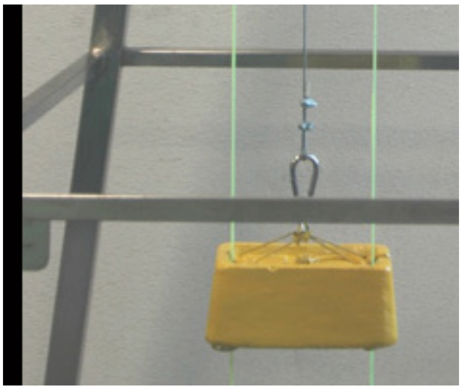

Foto 2

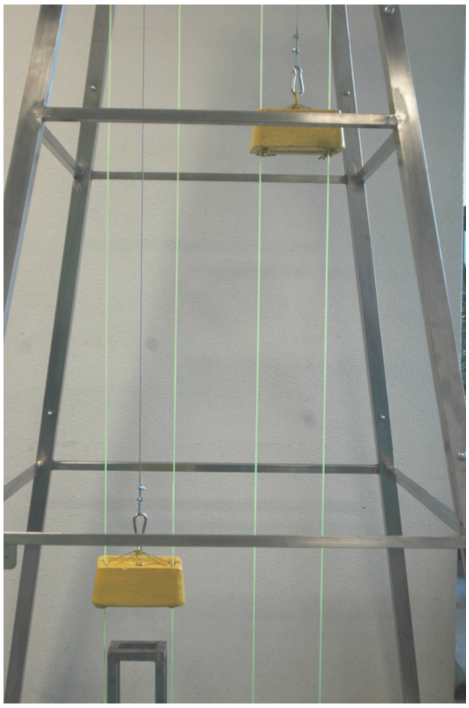

Foto 3

Misura della costante di accelerazione *g* (video 1)

Si osserva il moto quando masse di valore crescente sono appoggiate sulla massa M_2 di destra, che è portata in alto ed è lasciata scendere liberamente (foto 4). Il tempo impiegato ogni volta a scendere è misurato contando i fotogrammi tra inizio e fine del moto. Il tempo si ottiene sapendo che ogni fotogramma corrisponde a 1/25 di secondo. Lo spazio percorso è costante e vale $S = 2{,}37$ m.

Nella determinazione della massa totale in moto ($M_T + m_i$) si deve considerare la parte M_T che è costante e la massa m_i che, aggiunta di volta in volta al peso M_2, genera il moto accelerato. M_T è data dall'espressione seguente:

$M_T = (M_1 + M_2 + M_{cavo}) = 40{,}056$ kg.

La massa $M_{cavo} = 0{,}250$ kg comprende sia la massa del cavo di acciaio ($\varnothing = 3$ mm) sia la massa dei due moschettoni con cui le masse M_1 e M_2 sono agganciate al cavo. Si trascura la variabilità nella distribuzione della massa M_{cavo}, durante l'esperimento, dovuta al fatto che il cavo all'inizio è tutto dalla parte di M_1 e alla fine è tutto dalla parte di M_2. (Si può evitare la variabilità sospendendo sotto M_1 e M_2 due spezzoni di cavo lunghi quanto il percorso dei pesi, S = 2,37 m.

Nell'esperimento non è stata aggiunta alla massa M_2 la massa μ_D che serve a controbilanciare l'attrito, e questo fa si che la massa effettiva che determina l'accelerazione è (m_i - μ_D), perché una parte di m_i deve compensare l'attrito.

Foto 4

Teoria

L'equazione scalare che si deve usare è quella che, rispetto all'asse di rotazione della ruota, uguaglia il momento della forza agente $T = m_i gR$ alla derivata del momento angolare L_T.

$$dL_T/dt = (m_i - \mu_D)gR \qquad (1)$$

Poiché l'inerzia della ruota non è trascurabile, intervengono due contributi nel momento angolare $L_T = (L_{masse} + L_{ruota})$:

a) il momento angolare delle masse in moto, che è $L_{masse} = (M_T + m_i)\, vR$; con v uguale alla velocità comune del cavo e del sistema delle masse (quando il cavo non slitta nella scanalatura della ruota);

b) il momento angolare della ruota, che è $L_{ruota} = Iv/R$. Qui il momento d'inerzia della ruota vale $I = M_{ruota}R^2$ dove M_{ruota} è valutata circa 1 kg, in considerazione del fatto che

la ruota, comprendendo i raggi e l'asse centrale, ha una massa complessiva di 1,180 kg. Il diametro della ruota è $2R = 0{,}42$ m.
Il momento angolare totale è dato dall'espressione:

$$L_T = (M_T + M_{ruota} + m_i)\, vR = (M + m_i)\, vR \qquad (2)$$

e l'equazione del moto è

$$dL_T/dt = (M + m)\, R\, (dv/dt) = (m_i - \mu_D) gR. \qquad (3)$$

Qui $(m_i - \mu_D)$ è la massa effettiva che provoca l'accelerazione, e μ_D è la parte di m_i che serve a controbilanciare gli attriti dinamici della macchina. Da (3) si ha per l'accelerazione:

$$dv/dt = (m_i - \mu_D) g/(M + m_i) \qquad (4)$$

Si può esprimere l'accelerazione in funzione dello spazio percorso S e del tempo trascorso t

$$dv/dt = 2S/t^2 \qquad (5)$$

Da (4) e (5) si ha

$$g = (M + m)(dv/dt) / (m_i - \mu_D) = 2S(M + m)\, [(m_i - \mu_D)\, t_i^2]^{-1} \qquad (6)$$

Misura dei tempi di caduta

Sono stati eseguiti esperimenti con sette valori per la massa m_i e per ogni massa m_i gli esperimenti sono stati compiuti due volte. La tabella I raccoglie i risultati ottenuti. Nella 1ª colonna sono indicate le masse aggiunte per generare il moto accelerato. Nella 2ª e nella 3ª colonna sono segnati i tempi per percorrere lo spazio di 2,37 metri. I numeri della 4ª colonna sono la media dei tempi presenti nelle due colonne precedenti.

Tabella I.

m_i (kg)	durata del primo esperimento in numero di fotogrammi e in s	durata del secondo esperimento in numero di fotogrammi e in s	tempo medio in secondi
0,200	349-11 fotog. = 13,52 s	875-527 fotog. = 13,92 s	13,72
0,400	1170-968 fotog. = 8,08 s	1529-1324 fotog. = 8,20 s	8,14
0,500	1855-1673 fotog. = 7,28 s	2155-1980 fotog. = 7,00 s	7,14
0,700	2369-2226 fotog. = 5,72 s	2643-2499 fotog. = 5,76 s	5,74
0,900	2902-2780 fotog. = 0 4,88 s	3173-3049 fotog. = 4,96 s	4,92
1,000	3420-3304 fotog. = 4,64 s	3654-3538 fotog. = 4,64 s	4,64
1,500	3870-3778 fotog. = 3,68 s	4206-4113 3,72	3,70

Inserendo i valori numerici delle masse e la lunghezza del percorso, l'equazione (6) può essere riscritta nella maniera seguente:

$$g\,(m_i - \mu_D)\,t_i^2 = 2 \text{ x } 2{,}37(41{,}056 + m_i) \qquad (7)$$

$$g\mu_D = gm_i - 194{,}605/\,t^2 - 4{,}74m/\,t_i^2 \qquad (8)$$

Inserendo in (8) i valori di t_i della tabella I si ha:

Tabella II.

m (kg)	t (secondi)	*relazione*
0,200	13,72	$g\mu_D = 0{,}2\,g - 1{,}039$
0,400	8,14	$g\mu_D = 0{,}4\,g - 2{,}966$
0,500	7,14	$g\mu_D = 0{,}5\,g - 3{,}864$
0,700	5,74	$g\mu_D = 0{,}7\,g - 6{,}007$
0,900	4,92	$g\mu_D = 0{,}9\,g - 8{,}216$
1,000	4,64	$g\mu_D = 1{,}0\,g - 9{,}425$
1,500	3,70	$g\mu_D = 1{,}5\,g - 14{,}734$

Se l'attrito fosse stato compensato nella *Macchina*, non si avrebbe adesso la necessità di determinare, oltre a g, anche la massa incognita μ_D (il cui valore, vedremo, si aggira intorno a 0,100 kg) e la serie di esperienze avrebbe dato immediatamente sette determinazioni indipendenti per l'accelerazione di gravità. Nell'ultima delle equazioni della terza colonna, (quella m_i = 1,500 kg) la presenza del termine $g\mu_D$ è meno influente che nelle altre; se lo poniamo uguale a zero l'equazione diventa:

$$0 = 1{,}5g - 14{,}734$$

che risolta in g è:

$$g = 9{,}82 \text{ ms}^{-2}.$$

Il risultato è solo apparentemente ottimo perché in realtà inserendo la massa $\mu_D \approx$ 0.100 kg il risultato corretto diventa $g \approx 10{,}5 \text{ ms}^{-2}$.

Se vogliamo procedere in modo da coinvolgere tutte le masse m_i dobbiamo ricavare $g\mu_D$ da una delle sette equazioni della Tabella 2 in modo da eliminarlo nelle altre; una scelta ragionevole è quella di utilizzare l'equazione dell'esperimento con m = 0,200 kg, nella quale l'imprecisione nel conteggio dei fotogrammi incide meno. Introduciamo quindi nelle altre equazioni questo valore di $g\mu_D$:

$$g\mu_D = 0{,}2\, g - 1{,}021 \qquad (9)$$

Si arriva ai seguenti risultati, raccolti nella tabella III.

Tabella III.

m (kg)	*relazione*
0,400	g = 9,634
0,500	g = 9,416
0,700	g = 9,937
0,900	g = 10,253
1,000	g = 10,483
1,500	g = 10,535

Facendo la media dei valori di g della tabella III si ha:

$$g = 10{,}04 \text{ ms}^{-2}$$

e introducendo il valore ottenuto per g nella (9) si ha:

$$\mu_D = 0{,}102 \text{ kg}.$$

Il risultato, che si discosta poco (solo per il 2,3%) dal valore standard dell'accelerazione g = 9,81 ms^{-2}, può essere considerato soddisfacente, anche se il fatto di essere maggiore del valore esatto è un evidente indizio della presenza di un errore sistematico, certamente dovuto ad una sottovalutazione delle durate. La maniera seguita non è certo ortodossa, ma ritengo di non essermi discostato molto da procedimenti talvolta seguiti da Galileo avendo analizzato i risultati attraverso tabelle e sostituzioni.

Il metodo più corretto è quello dell'analisi statistica[8] con il metodo dei minimi quadrati (non lineari) che permette di valutare le due incognite g e μ_D contemporaneamente. Si ottiene:

g = 9,91 ± 0,18 ms^{-2}

μ_D = 0.096 ± 0,003 kg

È opportuno fare qui una osservazione sul metodo: nel conteggio dei fotogrammi è difficile stabilire l'inizio e la fine del moto. Un conteggio di fotogrammi precedente a quello della tabella I, fatto una decina di giorni prima, ha dato risultati differenti, segno che non ho saputo sviluppare un criterio obiettivo di conteggio. I risultati del conteggio più antico sono raccolti nella tabella IV:

Tabella IV

m_i (kg)	durata del primo esperimento in s	durata del secondo esperimento in s	tempo medio in secondi
0,200	13,68	14,04	13,86
0,400	8,20	8,12	8,16
0,500	7,40	7,16	7,28
0,700	5,80	5,64	5,72
0,900	5,04	4,96	5,00
1,000	4,76	4,80	4,78
1,500	3,72	3,76	3,74

I tempi in questa valutazione – tranne per un caso - sono tutti maggiori, anche se di pochissimo, di quelli della tabella I (la differenza in più è tra 2 e 14 centesimi di secondo) e quindi portano a un valore di g minore di quello ottenuto con la tabella I.

L'analisi statistica dei dati di questa seconda serie di valutazioni dà per le due incognite g e m i seguenti valori:

g = 9.68 ± 0.17 ms^{-2}

[8] Devo al collega e amico, prof. Alberto Di Lieto, la cortesia dell'analisi statistica dei dati.

$\mu_D = 0.095 \pm 0.003$ kg

Mettendo insieme i dati delle due tabelle si ha il risultato seguente:,

$g = 9.80 \pm 0.19$ ms^{-2}

$\mu_D = 0.095 \pm 0.002$ kg

Galileo avrebbe potuto fare gli esperimenti?

Galileo certamente avrebbe potuto fare la serie di esperimenti che sono stati finora descritti, e farli con la necessaria accuratezza, perché con il suo *cronografo a flusso costante* (orologio ad acqua) la misura precisa del tempo non è per lui un problema.

Chi ne ha avuto esperienza sa che l'estrazione del bicchierino dal filo d'acqua corrente può facilmente essere fatta coincidere con l'arrivo in basso della massa M_2 entro 5-6 centesimi di secondo, mentre può essere reso pressoché simultaneo l'inizio della raccolta dell'acqua con il rilascio di M_2, se le due operazioni sono fatte dallo stesso operatore che ha in una mano il bicchierino e con l'altra tiene ferma la massa sospesa M_2.

Quanto alla proporzionalità tra accelerazione e massa effettiva $(m_i - \mu_D)$ è assolutamente evidente a vista; basta dare uno sguardo alla tabella seguente, dove ho tenuto conto dell'attrito, avendo sottratto alle masse m_i una massa costante μ_D = 0,100 kg.

Tabella V

$(m_i - \mu_D)$	t (secondi)	$(m_i - \mu_D)t^2$
0,100	13,72	18,82
0,300	8,14	19,87
0,400	7,14	20,39
0,600	5,74	19,78
0,800	4,92	19,36
0,900	4,64	19,37
1,400	3,70	19,17

La vicinanza tra i risultati nell'ultima colonna è una conseguenza dal fatto che la massa aggiunta m_i è sempre piccola rispetto alla massa totale in moto $M + m_i$.

Che la forza necessaria per imprimere una data accelerazione è proporzionale alla massa che deve essere messa in moto è un fatto ben conosciuto da Galileo e l'uso sistematico che egli fa del metodo delle proporzioni è un argomento in più a favore di una sua scelta del fattore riduttivo $m_i / (M + m_i + \mu_D)$ per il moto nella sua *Macchina*, indipendentemente da ogni anacronistica conoscenza di meccanica.

Galileo, infatti, può facilmente avere intuito l'analogia che sussiste tra il moto rallentato che avviene sul piano inclinato ed è descritto dalla relazione:

$S(t) = g \,\mathrm{sen}\theta\, t^2/2$

e l'espressione del moto rallentato delle masse accoppiate sulla sua *Macchina*:

$S(t) = \mathrm{g}[\, m_\mathrm{i} /(M + m_\mathrm{i} + \mu_\mathrm{D})]\, t^2/2$

In questa fase iniziale delle prove con la *Macchina*, realizzate nell'autunno del 2005, non mi sono posto subito il problema dell'attrito: solo dopo l'esperimento per misurare g ho fatto le osservazioni sull'attrito, e non ho avuto l'accorgimento di introdurre, prima di iniziare gli esperimenti, la sua compensazione aggiungendo una opportuna massa addizionale μ_D a M_2; per questo motivo l'analisi dei risultati è diventata più complessa, avendo la necessità di determinare le due incognite g e μ_D. Negli esperimenti posteriori, ovviamente, la *Macchina* è stata sempre "compensata", come ho motivo di ritenere che avrà fatto Galileo. A questo proposito è illuminante un altro passo della *Sesta Giornata* [1g]:

> Dirò dunque (però sempre dubitando) che è vero che il peso, v.g., delle 100 libbre del grave discendente basta per alzare l'altro, che pure pesi 100 libbre, infine all'equilibrio, senza che quello venga instrutto e fornito d'altra velocità, e basterà solo l'eccesso di mezza oncia[9]; ma vo considerando che questa equilibrazione verrà fatta con gran tardità, dove che quando il cadente sopraggiunga con gran velocità, con una simile bisognerà che tiri in alto il suo compagno.

È notevole che Galileo affermi che l'aggiunta di mezza oncia, circa 28 grammi, fa muovere la massa M_2 ma che questa scenderà assai lentamente fino a fermarsi. La massa di 28 grammi non è perciò sufficiente a stabilire un moto costante e il piccolo spostamento da lui osservato è probabilmente effetto dell'urto inevitabile che avviene al momento di posare il piccolo soprappeso. Se poi si ricorda l'altra osservazione sugli attriti [1h]:

> ...E qui si dee avvertire che tutte queste cose seguirebbero quando si movessero tutti gli esterni ed accidentari impedimenti, dico di asprezza e gravità di corda, di girelle e di stropicciamenti nel volgersi intorno al suo asse, ed altri che ve ne potessero essere

non è una forzatura pensare Galileo si sia premunito di rimuovere gli attriti compensandoli con una massa aggiuntiva.

Ma la prova più convincente[10], a favore di un coinvolgimento di Galileo con esperimenti per la misura di g, è il cambiamento del valore dell'accelerazione di un corpo in caduta libera, rivelato dall'abbandono della sua prima definizione come «cento braccia in 5 secondi» ($\mathrm{g} \approx 4{,}05\ \mathrm{ms}^{-2}$) per una nuova definizione racchiusa dalla frase «si vede in 4 battute di polso aver passato più di cento braccia di spazio» ($\mathrm{g} \approx 9{,}7\ \mathrm{ms}^{-2}$). Il nuovo valore è introdotto da Galileo, dopo la pubblicazione del *Dialogo*

---

[9] L'oncia è 1/12 della libra e quindi vale 28,3 g.

[10] Ho trattato questo argomento in [6], alle pp. 155-169 e 215-225.

sui massimi sistemi del mondo, in vista di una nuova edizione, in una postilla conservata nella sua copia personale che è ora alla Biblioteca del Seminario di Padova [3b].

Misura dell'attrito statico e dell'attrito dinamico presenti nel moto (video 2).

Si carica la massa di destra (ferma) con piccoli pesi, per trovare il valore della massa minima μ_S che provoca il moto. Si osserva che il moto inizia quando la massa aggiunta μ_S è tra 0,130 kg e 0,140 kg. Si studia poi la massa necessaria a mantenere il moto uniforme, quando la massa di destra è già in moto. Per ottenere piccolissime velocità si osserva che è sufficiente aggiungere una massa $\mu_D \approx 0{,}050$ kg. L'attrito cresce con il crescere della velocità, a causa della resistenza dell'aria, che è abbastanza rilevante tenuto conto della superficie delle due masse in moto. L'esperimento sulla misura di *g* descritto in seguito, suggerisce un valore medio dell'attrito dinamico intorno a $\mu_D \approx 0{,}096$ kg, mentre nell'esperimento della strappata, dove la velocità è ancora maggiore, l'effetto dell'attrito è reso nullo dalla aggiunta alla massa M_2 di una massa di 0,130 kg.

Conservazione del momento angolare e della quantità di moto (video 3)

Si prova la *strappata*, con la massa di sinistra M_1 appoggiata ad uno sgabello, che la tiene sollevata circa 0,50 cm dal punto di partenza. La massa M_2 è scesa di quanto è salita la massa M_1.

L'esperimento consiste nell'alzare la massa M_2 ad un'altezza H = 0, 095 m dal punto di equilibrio e poi nel lasciarla libera di scendere. Nell'istante in cui il cavo si tende, il che avviene quando la massa M_2 ha percorso lo spazio H, inizia il moto congiunto delle due masse a velocità costante. Il percorso dopo la *strappata* è $S_u \approx$ 2,37 - 0,50 = 1,87 m (foto 5).

La velocità raggiunta al momento della *strappata*, prima che essa avvenga, è calcolata secondo la legge del moto $v = (2gH)^{1/2}$. Si misura la velocità finale subito dopo la strappata, quando il moto è uniforme, contando i fotogrammi (uno ogni 0,04 secondi) lungo tratti prestabiliti percorsi dalla massa M_2.

Si ripete l'esperimento facendo cadere la massa M_2 da un'altezza di 0,185 m.

Con i due esperimenti si può così verificare se è valida la conservazione della quantità di moto e la conservazione del momento angolare rispetto all'asse di rotazione. La spiegazione teorica è semplice: immediatamente prima della *strappata* il momento angolare rispetto all'asse della ruota è dato da M_2v_2R, con R il raggio della ruota; immediatamente dopo la *strappata* il momento angolare del sistema $(M_1 + M_2)v'R$, dove v' è la velocità congiunta di M_1 e M_2. La conservazione del momento angolare impone che si abbia:

$$M_2v_2R = (M_1 + M_2)v'R$$

e quindi

$$M_2v_2 = (M_1 + M_2)v'$$

L'esperimento può anche essere analizzato direttamente come una collisione non elastica.

Foto 5

Primo esperimento: caduta da H = 0,095 m

La massa M_2 è portata ad un'altezza H = 0,095 m (foto 6) sopra il punto di *stappata*, che è il punto in cui M_2 inizia a trascinare con sé M_1 e il moto diventa uniforme, con le due masse che si equilibrano.

Sono stati eseguiti tre esperimenti di caduta. Contando i fotogrammi passati durante due tratti di percorso, successivi alla *strappata* e delimitati da tre traverse orizzontali della macchina, è stato possibile prendere le misure per due valori indipendenti della velocità. M_2 percorre un primo tratto h_1 = 0.897 m, che è delimitato (in prospettiva) dalle due traverse che M_2 incontra scendendo, e poi di qui un secondo tratto h_2 = 0,908 m, fino alla terza traversa.

Sappiamo che la velocità di caduta dall'altezza H_1 = 0.095 m è $v_1 = (2 \times 9{,}81 \times 0{,}095)^{1/2} = 1{,}36\ ms^{-1}$

Foto 6

La conservazione della quantità di moto per un urto <u>completamente non elastico</u> tra due masse uguali prevede una velocità dimezzata dopo l'urto, e quindi

$v'_{1\ \mathrm{TEORICO}} = 0{,}68\ \mathrm{ms}^{-1}$, [1]

risultato che deve essere confrontato con la velocità di $M_1 + M_2$ dopo l'urto,

$v'_{1\ \mathrm{SPERIMENTALE.}} \approx 0{,}55\ \mathrm{ms}^{-1}$.

In quest'ultima espressione appare la velocità media misurata nel primo tratto, tra la prima e la seconda traversa, perché il moto di $M_1 + M_2$ non è esattamente uniforme, ma risulta decelerato a causa dell'attrito, come dimostra la diminuzione della velocità media nel secondo tratto, tra la seconda e la terza traversa. Nella tabella i tempi nelle colonne che iniziano con L. sono stati ottenuti dal conteggio dei fotogrammi fatto da Claudio Luperini; analogamente V.C. è per Vergara Caffarelli.

Tabella VI

in caduta libera	tempo 1° tratto 0,897 m		velocità parziale ms^{-1}	tempo 2° tratto 0,908 m		velocità parziale ms^{-1}	tempo totale 1.805 m		velocità media ms^{-1}
Massa M_2	L.	V.C.		L.	V.C.				
9,5	1,52	1,61	0,573	1,72	1,56	0,553	3,24	3,17	0,563
9,5	1,52	1,68	0,540	1,72	1,64	0,540	3,24	3,32	0,540
9,5	1,60	1,76	0,534	1,72	1,68	0,534	3,32	3,44	0,534
velocità media su 3 esperimenti			**0,549**			0,542			0,546

Nel nostro caso l'urto è parzialmente elastico, come è dimostrato dal rimbalzo in avanti e dalle oscillazioni della massa M_1 ben visibili al momento della *strappata* e durante il moto successivo.

Secondo esperimento: caduta da H = 0,185 m

La massa M_2 è alzata 0,185 m dal punto di *stappata* che corrisponde al punto di equilibrio (foto 6).
Sono state eseguiti tre misure della velocità finale, i maniera analoga a quella seguita nell’esperimento precedente.

Di nuovo l’esperimento conferma che l’urto è solo parzialmente non elastico perché la velocità dopo l'urto non si dimezza. Sappiamo, infatti, che la velocità di caduta dall'altezza H_1 = 0.185 m è $v_1 = (2 \times 9{,}81 \times 0{,}185)^{1/2} = 1{,}91\ ms^{-1}$
Si ha quindi $v'_{1\ TEORICO} = 1{,}91/2 = 0{,}95\ ms^{-1}$ da confrontarsi con le velocità misurata dopo l’urto $v'_{1\ SPERIMENTALE} = 0{,}82\ ms^{-1}$.

foto 6

Tabella VII

in caduta libera	tempo 1° tratto 0,897 m		velocità parziale ms^{-1}	tempo 2° tratto 0,908 m		velocità parziale ms^{-1}	tempo totale 1.805 m		velocità media ms^{-1}
	L.	V.C.		L.	V.C.				
18,5	1,04	1,16	0,815	1,16	1,00	0,841	2,20	2,16	0,828
18,5	1,04	1,12	0,831	1,16	1,04	0,825	2,20	216	0,828
18,5	1,08	1,16	0,801	1,28	1,12	0,757	2,36	2,28	0,778
velocità media su 3 esperimenti			**0,816**			0,808			0,811

La sostituzione delle guide di nylon con guide rigide (tubi di acciaio inossidabile) migliora l'esperimento, che si avvicina ai risultati aspettati da una collisione *completamente* non elastica[11].

Galileo avrebbe potuto fare gli esperimenti?

Come può essere intuito dalle foto 5 e 6 e ancor meglio si può vedere nel video che è in internet, l'esperimento non presenta difficoltà; è sufficiente porre la massa M_1 sullo sgabello e sollevare la massa M_2 di una quantità precisa (Galileo indica l'altezza di un *braccio* = 0,55065 m). La misura del tempo può essere fatta come per la misura di g. Per la valutazione della velocità all'istante della *strappata* basta conoscere g. Qui nasce un problema, perché Galileo afferma che la velocità comune a M_1 e a M_2 dopo la strappata è uguale a quella che aveva M_1 al momento della strappata.

> Si conserverà dunque il detto grado massimo di velocità, ed il moto, di accelerato, si convertirà in equabile: quale poi sia per essere la futura velocità, è manifesto dalle cose dimostrate e vedute ne' passati giorni, cioè che la velocità futura sarà tale, che in altrettanto tempo quanto fu quella della scesa, si passerà doppio spazio di quello della caduta.

Vi sono tre possibili interpretazioni di quest'ultima affermazione:

a) Galileo non ha fatto l'esperimento ed è convinto che la massa cadente continua il suo corso con la velocità acquisita nel moto accelerato, pur tirarsi dietro la massa che era ferma: Questo mi sembra assai poco credibile;

b) Galileo ha misurato la velocità comune di M_1 e M_2 dopo la strappata e l'ha confrontata con la velocità che ha acquisito la massa cadente M_2, velocità che non è possibile misurare ma che può essere dedotta dalla conoscenza di g. In tal caso può aver usato il più antico valore di g, quello che ha sintetizzato con «100 braccia in 5 secondi», che è meno della metà del suo vero valore e quindi ne ha tratto la conclusione, che pur ripugna al senso comune, di una velocità non alterata dalla strappata;

c) Galileo conosce con buona approssimazione l'accelerazione di gravità, a cui dà il valore $g \approx 9{,}7\ ms^{-2}$ secondo l'affermazione «si vede in 4 battute di polso aver passato più di cento braccia di spazio», e con il procedimento che ha seguito costantemente nella *Sesta Giornata* è tornato più avanti a discutere dell'esperimento ma questo lo ha fatto nella parte finale che è andata smarrita o sottratta (come è successo per molti altri manoscritti) prima che il Viviani potesse farne una copia. Il testo a stampa, infatti, si interrompe improvvisamente nel mezzo di un approfondimento sulla forza della percossa, chiesto da Sagredo, in cui Galileo introduce il piano inclinato con la carrucola.

[11] Si vedano il libro GALILEO GALILEI AND MOTION (2009) pp. 227-245 e il video IL LABORATORIO DI GALILEO GALILEI, presente nel sito.

Conclusione.

Gli esperimenti descritti dimostrano che la *Macchina di Galilei* è uno strumento che, come tutti gli altri geniali ritrovati di Galileo (il piano inclinato, il pendolo, l'orologio ad acqua), sarebbe stato utilissimo per la scienza del secolo XVII, ma i suoi successori non hanno potuto (o creduto opportuno) seguire con essi i percorsi così chiaramente tracciati.

Come ho già ricordato, ho ripreso in esame alcuni degli esperimenti eseguiti con la Macchina in una fase iniziale della sua costruzione soprattutto perché sono illustrati da tre video ora disponibili in rete nel mio sito. Sulla possibilità o meno che Galileo abbia eseguito gli esperimenti e sia stato in grado di interpretarli, ne ho parlato negli scritti citati all'inizio e mi riprometto di ritornarci in un libro che sto scrivendo, il cui titolo provvisorio è: *GALILEO E LA FORZA DELLA PERCOSSA. La sua ultima* ricerca.

BIBLIOGRAFIA

[1] *Le Opere di Galileo Galilei*, Edizione Nazionale, vol. VIII, *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a due nuove Scienze,* [1a] pp. 321-346; [1b] p. 333; [1c] pp. 333-334; [1d] p. 336; [1e] pp. 336; [1f] pp. 336-337; [1g] p. 334; [1h] p. 336.

[2] *Le Opere di Galileo Galilei*, Edizione Nazionale, vol. II, *Le meccaniche*, p. 189.

[3] *Le Opere di Galileo Galilei*, Edizione Nazionale, vol. VII, *Dialogo sopra i due Masimi Sistemi del Mondo*, [3a] p. 242; [3b] p. 54.

[4] *La macchina di Galileo Galilei* in internet all'indirizzo: http://www.illaboratoriodigalileogalilei.it, nella pagina "*Scritti e pubblicazioni su Galileo*". Allo stesso indirizzo si veda anche: *Il principio d'inerzia negli ultimi scritti di Galileo*, Cronos, vol. 10 (Valencia 2007), pp. 63-87,

[5] *Il Laboratorio di Galileo Galilei*, in internet all'indirizzo: http://www.illaboratoriodigalileogalilei.it, nella pagina "*multimedia*", aprendo "*video 1993-2009*".

[6] ROBERTO VERGARA CAFFARELLI, *Galileo Galilei and Motion. A Recontruction of 50 Years of Experiments and Discoveries*, Bologna 2009, (pubblicato insieme da SIF e SPRINGER).

[7] *Prove di Funzionamento della Macchina di Galilei*, in internet all'indirizzo: http://www.illaboratoriodigalileogalilei.it, nella pagina "*multimedia*", aprendo "*video 1993-2009*".