Il concorso della Scuola Normale Superiore di Pisa. Il compito di fisica.

Terminato nel 1918 il secondo anno di liceo Fermi supera "con onore" nella sessione di luglio l'esame di licenza liceale e comincia a prepararsi per il concorso per la Scuola Normale Superiore. Al suo amico Enrico Persico scrive il 31 luglio:

> «Io seguito a fare la mia solita vita: la mattina a Ladispoli e la sera all'ufficio meteorologico. Finiremo i bagni il 10 agosto ma non ti so dire che cosa faremo dopo perché il babbo non sa quando potrà prendere il suo congedo; ti terrò informato. La lettura del Chwolson procede celermente e calcolo di averlo finito tra un mese o un mese e mezzo perché ho trovato circa 1000 pagine da saltare perché le conoscevo».

Il "Chwolson" che sta leggendo è il grande *Traité de Physique* di O.D. Chwolson, in quattro tomi e 4.350 pagine nell'edizione di Parigi del 1908-1913, che Fermi va a consultare nell'Ufficio centrale di meteorologia, dove era a capo della sezione climatologica il prof. Filippo Eredia, già suo professore al liceo.

Fermi aveva valutato per eccesso la stima del tempo necessario; infatti il 18 agosto scrive di nuovo all'amico:

> «La lettura del Chwolson procede rapidamente e prevedo che fra 3 o 4 giorni sarà finita; è uno studio che sono molto contento di aver fatto perché ha approfondito molto le cognizioni di fisica che già avevo e mi ha insegnato molte cose di cui non avevo nemmeno un'idea. Con queste basi credo che potrò concorrere a Pisa con una certa probabilità di riuscita; se poi accettare "ghe pensarum"».

In perfetta coincidenza con la conclusione della "lettura" del Chwolson, portata avanti alla media di 150 pagine al giorno, il 22 agosto esce il bando del concorso, di cui si riportano i punti principali:

> Ai primi 2 dei vincitori del concorso nella classe di lettere e filosofia ed ai primi 2 dei vincitori nella classe di scienze fisiche, matematiche e naturali, sarà accordato o un posto gratuito nel convitto annesso alla scuola o un posto di alunno aggregato con sussidio di L. 75 per un tempo non superiore ai mesi 8. Gli esami di concorso saranno scritti e orali. Quelli scritti principieranno la mattina del 28 ottobre p.v. a ore 8 precise. Le domande di ammissione al concorso in carta da bollo da L. 1, e corredate dai relativi certificati debitamente legalizzati dalle competenti autorità, dovranno essere inviate, non più tardi del 20 ottobre 1918, alla Direzione della scuola, o non più tardi del 15 ottobre 1918, ai rettori delle RR. Università di Bologna, Catania, Genova, Napoli, Padova, Palermo, Pavia, Roma e Torino. Gli esami potranno essere fatti anche presso questa Università quando i concorrenti lo richiedano nella loro domanda.

Fermi presenta la domanda il 15 ottobre, ultimo giorno utile, precisando che desidera sostenere i relativi esami presso la regia Università di Roma, dove si presenterà, come è prescritto dal bando, la mattina del 28 corrente alle ore 8.
Gli esami però furono rimandati a causa delle condizioni sanitarie – infuriava la spagnola - al giorno 12 novembre successivo. Quel giorno:

«In un'aula della R. Università si riuniscono i professori Pittarelli, Raffaele e Eredia incaricati dal signor Rettore per gli esami al Concorso nella R. Scuola Normale Superiore di Pisa. Assume la presidenza il prof. Pittarelli; introdotto il candidato Enrico Fermi, il presidente apre la busta contenente il tema valevole pel 12 novembre 1918. I predetti professori constatata che l'apertura della busta è avvenuta alle ore 10.30 stabiliscono il turno di assistenza[1] fino alle ore 18.30».

In calce seguono le tre firme. Il tema era di Algebra e il giovane concorrente ebbe alcuni fogli, firmati dal presidente, sufficienti alla brutta e alla bella copia. Il giorno seguente fu la volta di Geometria e finalmente il 14 novembre Fisica, con le solite otto ore di tempo a disposizione.

La scelta di sostenere le prove a Roma ha portato alla redazione di alcuni atti, che permettono di conoscere come si svolsero gli esami. Il giorno successivo alla conclusione degli scritti la commissione passò alle prove orali. Il regolamento prevedeva che durassero un'ora ognuna e che il relativo verbale fosse trasmesso al Direttore della Scuola Normale. A Pisa avrebbero corretto i compiti scritti, insieme agli altri e valutato gli orali in base al verbale. Il giudizio della commissione romana su Fermi fu eccezionale:

«Alle ore 10 del 15 novembre 1918 si procede agli esami orali richiesti dal bando di concorso.
Il prof. Pittarelli interroga il candidato sui seguenti argomenti: omotetia delle figure (in particolare del cerchio), poliedri regolari e loro reciprocità rispetto alla sfera, spiegazione intorno alle equazioni differenziali adoperate nel lavoro di fisica, funzioni esponenziali e circolari.
Il prof. Eredia interroga il candidato sui seguenti argomenti: formula caratteristica dei gas, formula delle lenti, formule del prisma, correnti alternate - trasformatori, riduzione della pressione barometrica a O° e al mare, teoria della pila.
Il prof. Raffaele interroga il candidato sui seguenti argomenti: fenomeni di capillarità, pressione osmotica.

La commissione è lieta di constatare che il giovane Fermi ha risposto mostrando ampiamente di avere una cultura superiore di molto a quella che ordinariamente si riscontra negli studenti ottimi di scuole secondarie. Il Fermi ha esposto i vari argomenti con molta esattezza, rigore matematico e precisione massima, mostrando completa padronanza degli argomenti anche più recentemente illustrati.

La Commissione
Giulio Pittarelli - Federico Raffaele - Filippo Eredia.»

La Commissione conclude il suo lavoro con il seguente verbale, che trasmette insieme ai precedenti:

«La Commissione nominata dal signor Rettore per esaminare il giovane Enrico Fermi, aspirante ai posti messi a concorso dalla R. Scuola Normale Superiore Universitaria di Pisa, si è riunita di nuovo oggi 26 novembre 1918 per assegnare i voti agli esami orali sostenuti dal detto giovane Fermi. I Commissarii unanimamente decidono di assegnare i seguenti voti: Algebra dieci,

[1] Lo statuto della Scuola Normale all'art. 22 prescriveva: «I concorrenti avranno 8 ore di tempo per trattare il loro tema, e durante questo tempo non potranno comunicare tra loro, né con persone estranee, e saranno sorvegliati a turno da uno o più membri della commissione esaminatrice.

Geometria dieci, Fisica dieci. E se i regolamenti lo consentissero la Commissione darebbe con plauso la lode. I voti su indicati si riferiscono, si intende alla massima votazione. G Pittarelli F. Raffaele Filippo Eredia».

Segrè scrive in proposito:

«Tutto il saggio [*di Fermi*] continua a un livello e con una maestria che avrebbe fatto onore a un esame di laurea universitaria. L'esaminatore, il Prof. Pittarelli, professore di Geometria descrittiva all'Università di Roma, era un buon matematico, un buon pittore dilettante e una ottima persona; naturalmente rimase strabiliato del compito di Fermi e decise di parlare col candidato, per quanto ciò non fosse prescritto dai regolamenti. Alla fine del colloquio Pittarelli disse a Fermi che nella sua lunga carriera di professore non aveva mai incontrato uno studente come lui, che senza dubbio egli era una persona straordinaria, che sarebbe andato molto lontano e sarebbe diventato uno scienziato importante e che per quel che riguardava l'ammissione alla Scuola Normale era sicuro che avrebbe vinto uno dei posti perché era inverosimile che ci potessero essere altri concorrenti dello stesso calibro. Fermi stesso mi raccontò questi fatti molti anni dopo con ovvia soddisfazione e gratitudine per Pittarelli che lo aveva incoraggiato e gli aveva infuso fiducia nella propria abilità».

La fama della precocità di Fermi nasce infatti con il suo famoso compito di Fisica per l'ammissione alla Scuola Normale Superiore, largamente e giustamente pubblicizzato. Il testo è stato analizzato con attenzione[2] e mi restano poche ulteriori osservazioni.

La prova di Fisica, che consiste in un tema e in un problema, si presenta con un tale ordine, che ha destato meraviglia. Il tema fu: *Caratteri distintivi dei suoni e loro cause*; il problema invece chiedeva il valore dell'intensità della corrente a partire dalla deviazione dell'ago magnetico di una bussola delle tangenti.

Il tema viene svolto in sette pagine in cui vengono discusse la produzione e la propagazione del suono. Come sorgente del suono Fermi sceglie una verga elastica incastrata a una estremità, perfettamente libera dall'altra, che viene fatta oscillare trasversalmente, la cui trattazione è un difficile problema di fisica matematica.

È noto che la preparazione di Fermi nelle matematiche era stata accuratissima e che aveva studiato a fondo il *Traité de mécanique* di Poisson[3].

Qui aveva trovato nella seconda parte della dinamica l'equazione delle vibrazioni trasversali di una verga elastica, risolta[4] in tutti i dettagli secondo un metodo che Fermi aveva apprezzato grandemente, tanto da consigliarne la consultazione all'amico Persico[5].

Certamente si rimane abbastanza sorpresi, ed anche ammirati, che Fermi inizi il compito scrivendo l'equazione differenziale, che non è per niente intuitiva né comune, senza darne alcuna giustificazione, come se l'avesse fissata nella sua memoria eccezionale.

---

[2] M.C.SASSI e F.SEBASTIANI, *La formazione scientifica di Enrico Fermi*, Giornale di Fisica, 40 (1999) 89-113.

[3] S.D.POISSON, *Traité de mécanique*, terza edizione, Bruxelles 1838, che è identica nel testo alle edizioni precedenti.

[4] Se ne può vedere l'esposizione nella II parte del Traité, *Dynamique*, al paragrafo V, pp. 324-332.

[5] «Pisa, 8/6/1919 […] Sento che ti sei dato allo studio delle equazioni alle derivate parziali. Ti consiglierei al proposito, se ne hai il tempo, di consultare un capitolo della "Mécanique" di Poisson, inserito nella dinamica dei sistemi continui in cui è esposto un metodo, di cui ti ho parlato altre volte, che permette in moltissimi casi se non la soluzione completa del problema, per lo meno la determinazione dei periodi per piccole oscillazioni che in gran parte di casi è la questione che più interessa in pratica». La "Digressione sugli integrali delle equazioni alle derivate parziali" si trova nella *Dynamique*, paragrafo IV, pp. 318-324.

La spiegazione invece è molto semplice e poteva essere immaginata, anche se non è venuta in mente a nessuno: c'è sempre una “brutta copia” che precede la “bella” e nella brutta copia lasciata insieme alla bella, la commissione poté vedere il percorso seguito dal candidato.

La brutta copia del compito di fisica, tra l'altro, è in completo contrasto con la redazione finale del compito non solo per l'aspetto caotico e agitato della scrittura, che non si ritrova nelle altre “brutte” dei compiti di algebra e di geometria, ma anche perché l'approccio è invertito rispetto alla bella copia, in quanto viene affrontata prima la propagazione e poi la produzione del suono.

Per la propagazione del suono Fermi segue una via del tutto standard, che ripete con più dettagli nella bella copia, giungendo rapidamente all'equazione delle onde. La sua esposizione è precisa, chiara, e funzionale allo scopo. Priva di caratteristiche particolari, non lascia individuare il testo a cui si ispira, anche se possiamo escludere che siano il *Traité de mécanique* di Poisson o il trattato del Chwolson.

La propagazione del suono è anche il titolo di un capitolo della *Hidrodynamique* di Poisson, che pur non avendo quei pregi che abbiamo riconosciuto alla sintetica trattazione di Fermi, ne ha molti altri, costituendo, come tutto il trattato, una rassegna delle sue ricerche di fisica-matematica[6].

La parte più interessante del compito è il trattamento della verga elastica.

Occorre subito premettere che Fermi aveva già studiato in dettaglio questa equazione nell'ipotesi più complicata che all'estremo libero fosse concentrata una massa m.

Il trattamento di questo problema è esposto in una delle ultime pagine di un quaderno risalente ancora dei tempi del liceo, conservato nel fondo fermiano della Domus Galileiana di Pisa, che ho recentemente avuto a disposizione.

La soluzione e il metodo per arrivarci sono gli stessi del compito; in più, nel caso di $m = 0$, Fermi aggiunge anche una risposta numerica molto precisa alla formula per la frequenza:

$$\nu = [\kappa/(2\pi\, l^2)][EI/\rho]^{1/2}.$$

Trova infatti che il più piccolo valore di κ è circa 1,87 e che con questo valore si ha: $\nu = (0{,}398/l^2)[EI/\rho]^{1/2}$

Fermi dunque prima del concorso aveva già trattato la soluzione (secondo il metodo di Poisson) dell'equazione della verga vibrante, copiandola in un quaderno dove andava annotando tutte quelle cognizioni che potevano risultargli utili e dove vi sono molte pagine dedicate alle equazioni differenziali e ad argomenti di fisica riguardanti la termologia, l'elettrodinamica e la relatività ristretta.

Il motivo del suo interesse è senza alcun dubbio il fatto che questa equazione era stata studiata da Poisson proprio come prima applicazione della sua tecnica di integrazione con una serie, tanto apprezzata da Fermi.

Un esame più ampio merita invece l'equazione di partenza:

$$\partial^2 y/\partial t^2 + a^2\, \partial^4 y/\partial x^4 = 0$$

della cui deduzione esiste una traccia assai poco chiara nella brutta copia, che proprio per questo è interessante approfondire.

[6] Mi sembra di poter escludere Poisson come fonte immediata di Fermi per l'equazione delle onde: nel suo libro vi è tutto, il necessario, ma per verificarlo, occorre costruire una tabella di corrispondenza tra i simboli di Fermi e quelli di Poisson, che usa una notazione obsoleta, e con questa corrispondenza percorrere un cammino abbastanza dispersivo da pag. 412 fino a pag. 428 del *Traité de mécanique*.

Dopo alcuni tentativi cancellati, che rivelano lo sforzo "a ritroso" di ricordare di colpo l'equazione, Fermi è costretto a ritrovare il filo di una dimostrazione difficile, che nessun autore presenta in una forma veramente soddisfacente. Il suo punto di partenza è la seguente equazione che numera con (1) e che scrive con molta incertezza nei segni e negli estremi di integrazione:

$$- \int_a^x m d^2y/dt^2 (\xi - x) d\xi + EI\, \partial^2 y/\partial x^2 \qquad (1)$$

Nella teoria dell'elasticità il termine EI $\partial y^2/\partial x^2$ ha un significato ben preciso, che cercherò di illustrare, anche in vista di una migliore comprensione del compito.

Consideriamo una lamina elastica e omogenea incastrata ad una estremità, di sezione costante S, perfettamente orizzontale quando è nella posizione di quiete. Per farla vibrare occorre che inizialmente la lamina venga leggermente incurvata, per esempio verso il basso, e poi sia lasciata libera. La piccola curvatura iniziale è ottenuta applicando una forza verticale all'estremità libera.

Curvandosi, se la concavità è verso il basso, le *fibre*[7] della parte superiore della lamina si allungano e quelle della parte inferiore si comprimono. È necessario quindi che queste due parti siano separate da una superficie intermedia che si curvi senza cambiare lunghezza: ad essa viene dato il nome di *superficie neutra*.

La causa di queste deformazioni sono le tensioni interne. La forza applicata, e la reazione vincolare all'estremità fissa costituiscono la coppia che curva la lamina e genera le tensioni interne. Dire che la lamina è fatta di un materiale perfettamente elastico e omogeneo significa che le deformazioni, e quindi le tensioni, sono le stesse lungo tutta la lunghezza della lamina.

Lasciata libera, la lamina comincia ad oscillare assumendo una curvatura variabile nel tempo, con la concavità ora rivolta in alto ora in basso.

Scegliamo l'estremo fisso come origine, la coordinata x lungo la lamina, la coordinata y perpendicolare alla lamina, diretta verso il basso.

Sia x un punto qualsiasi lungo la linea neutra e consideriamo la parte della lamina compresa tra x e x+ dx. Quando la lamina è in riposo, le due sezione trasversali separate dalla distanza dx sono parallele.

Al tempo t supponiamo che la concavità sia verso il basso e sia $\rho(t)$ il raggio di curvatura: le due sezioni trasversali non sono più parallele ma sottendono un angolo $\delta\theta$. Lungo la linea neutra non si avrà allungamento, cioè $dx = \rho\delta\theta$ mentre la distanza tra le sezioni all'altezza y sarà $(\rho+y)\delta\theta$. Si consideri l'allungamento relativo

$$[(\rho+y)\delta\theta - \rho\delta\theta]/\rho\delta\theta = y/\rho$$

Un materiale è elastico se tra tensione σ e deformazione y/ρ vi è un rapporto di proporzionalità costante nel tempo, dato dal *modulo di Young* tradizionalmente indicato con E:

$$\sigma = E\, y/\rho = E\, y(\partial^2 y/\partial x^2) \qquad (2)$$

In (2) si è introdotta l'espressione $\rho^{-1} = \partial^2 y/\partial x^2$, valida per curve con tangente $\partial y/\delta x$ molto piccola: qui y(x) è la curva che descrive la *fibra* che passa per y.

Dopo aver moltiplicato i due membri della (2) per y, si integri su tutta l'area S della sezione

[7] L'uso di questo termine non presuppone nessuna ipotesi strutturale sulla materia: è solo la maniera di dare un nome alle sottili sezioni longitudinali in cui viene idealmente suddivisa la verga.

x= costante: al primo membro avremo il *momento flettente* M rispetto alla linea neutra, mentre il secondo membro diviene, ricordando che la curvatura è praticamente costante su tutta la sezione, $EI(\partial^2y/\partial x^2)$ dove $I = \iint y^2 dS$ è il momento di inerzia della sezione in relazione alla linea neutra.

Il termine $EI(\partial^2y/\partial x^2)$ è dunque uguale al momento flettente M sulla sezione x= costante.

$$M(x) = EI(\partial^2y/\partial x^2) \qquad (3)$$

Per scrivere l'equazione (1) Fermi si deve essere rifatto a qualche testo di Scienza delle Costruzioni, dove può aver visto l'espressione con cui il momento flettente M(x) viene espresso in funzione del carico distribuito q(x') lungo la trave e della reazione R all'estremo della trave:

$$M(x) = Rx - \int_0^x q(x')\,(x-x')\,dx'$$

Derivando due volte rispetto a x, si ha

$$d^2M/dx^2 = - q(x) \qquad (4)$$

Se m(x) è la massa per unità di lunghezza e se le oscillazioni sono libere, il carico distribuito è dato dal cosiddetto *carico perduto*:

$$q(x) = m(x)\, d^2y/dt^2 \qquad (5)$$

A partire dalle espressioni (3), (4) e (5) si ottiene l'equazione differenziale per le oscillazioni della verga.

Anche in questo caso abbiamo potuto costatare che Fermi non ricorre né a Poisson, né a Chwolson, anzi abbiamo riconosciuto nella deduzione dell'equazione della verga l'influenza di altri testi, forse quei testi di ingegneria cui fa cenno, senza specificarli, l'ing. Amadei nella sua nota lettera a Segrè[8].

Anche il problema "pratico" del calcolo dell'intensità della corrente misurata con la Bussola delle Tangenti richiede conti non piccoli, che sono svolti in due fogli di "brutta", pieni di appunti che suggeriscono una fretta ansiosa.

Il testo del problema, che Fermi non riporta, è stato trascritto da un altro concorrente, Luigi Fantappiè.

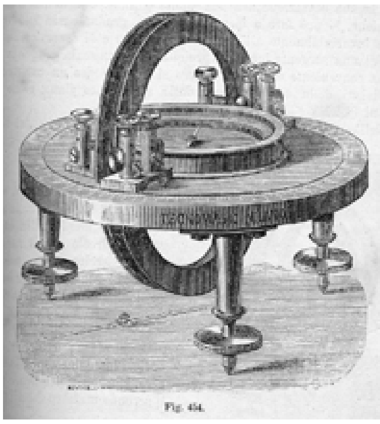
> "Una corrente elettrica costante circola in una bussola delle tangenti il cui avvolgimento è orientato nel piano del meridiano magnetico; si produce perciò una deviazione del breve ago posto al centro. Diametro del cerchio su cui sono avvolte le spire cm 50,2. Numero delle spire 5. Deviazione dell'ago 35°. Componente orizzontale del campo magnetico terrestre in unità assolute [C.G.S] 0,2356. Si richiede di calcolare la misura dell'intensità della corrente in unità assolute [C.G.S]".

La bussola delle tangenti è un apparecchio che all'epoca del compito era presente in tutti i

[8] "Durante il periodo di tempo che corre dal settembre 1917 al luglio 1918 Enrico studiò anche alcune materie d'Ingegneria sui vari libri che io gli prestavo". EMILIO SEGRÈ, *Enrico Fermi fisico*, Bologna 1987, pag. 11.

laboratori didattici ed era stato per molto tempo l'unico strumento di misura fondamentale per lo studio della corrente elettrica. Il principio su cui si basa è molto semplice. Una corrente circolare I, di raggio R crea al centro della spira un campo magnetico perpendicolare al piano che la contiene, la cui intensità H_o è data da $H_o = 2\pi\ I/R$. Il campo magnetico aumenta con il numero delle spire e se le spire sono n, il campo magnetico generato dalla corrente I sarà:

$$H_o = 2\pi\ nI/R$$



L'apparecchio ha, sospeso al centro, un ago magnetizzato che si orienta secondo il campo magnetico terrestre H. Si orientano anche le spire parallelamente al meridiano magnetico, e si fa circolare la corrente I. Quando l'ago calamitato sarà nuovamente in equilibrio si può leggere l'angolo di deviazione α sul cerchio graduato orizzontale dell'apparecchio. L'equilibrio è raggiunto quando $H_o \cos\alpha = H \,\mathrm{sen}\alpha$ e quindi

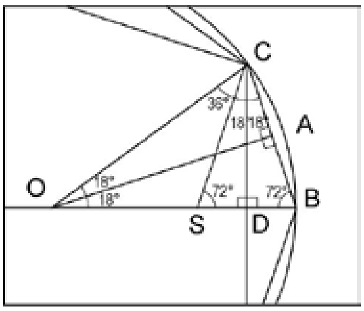
$$I = (HR/2\pi\ n)\ \mathrm{tg}\ \alpha$$

L'unico dato che manca per la soluzione è: tg 35°. Dalla brutta copia si comprende che Fermi vuole calcolare tg 36° perché $\mathrm{tg}\ 35° = \mathrm{tg}\ (36° - 1°) = (\mathrm{tg}\ 36° - \mathrm{tg}1°)/(1 - \mathrm{tg}\ 36°\ \mathrm{tg}1°)$ e per angoli piccoli la tangente può essere approssimata dall'angolo in radianti: in particolare $\mathrm{tg}1° = \pi/180$

Dalla "brutta" si intuisce il percorso che viene seguito: si calcola algebricamente sen 18° da cui poi ottiene immediatamente tg 36°.

Per ottenere questo, Fermi parte da una costruzione geometrica da cui ricava un'equazione per sen 18°. Si veda la figura seguente (fig. 2) che è stata completata a partire da un accenno esistente nella brutta.

Abbiamo disegnato un lato del decaedro iscritto in una circonferenza di raggio R = 1, e costruito una serie di triangoli isosceli che nella figura sono riconoscibili dagli angoli alla base. In particolare abbiamo le seguenti relazioni:



$OS = SC = CB = 2\ AB = 2\ \mathrm{sen}\ 18° = 2y$
$DB = OB – OD = 1 – \cos 36° =$
$1 – (\cos^2 18° – \mathrm{sen}^2 18°) = 2\mathrm{sen}^2 18° = 2y^2$

La relazione finale è $1= OB = OS + SB = = OS + 2DB = 2y + 4y^2$
Riordinando possiamo scrivere l'equazione che ci fornisce il valore algebrico di sen 18°. L'equazione è:

$$4y^2 + 2y – 1 = 0$$

che ha come soluzione

$$y = \mathrm{sen}\ 18° = (\sqrt{5} – 1)/4$$

La nostra equazione non coincide con quella scritta da Fermi, che è: $x^2 + x – 1 = 0$, ne è però equivalente, come si può vedere immediatamente con la sostituzione x = 2y.

Con le solite formule trigonometriche si arriva a

$tg\ 36^o = 2sen\ 18^o(1-sen^2 18^o)^{1/2}\ (1-2sen^2 18^o)^{-1} = 1/2\ (\sqrt{5} - 1)\ (10 + 2\sqrt{5})^{1/2}\ (\sqrt{5} + 1)^{-1} =$
$(10 - 2\sqrt{5})^{1/2}\ (\sqrt{5} + 1)^{-1} = 0{,}7265$

Fermi utilizza il valore arrotondato tg $36^o = 0{,}727$.

26 Novembre 1918

Enrico Fermi

Fisica

caratteri distintivi dei suoni e loro cause

Supponiamo situato nel centro O di un sistema di coordinate Cartesiane ortogonali x, y, z un piccolo corpo che vibri. Le vibrazioni di questo corpo saranno trasmesse all'aria ambiente e vediamo il meccanismo di tale trasmissione. Supporremo perciò che le vibrazioni del corpo siano piccolissime e le trasformazioni dell gas adiabatiche. p ρ pressione e ~~temperatura~~ densità iniziali

$$p' = p(1+\eta) \quad \rho' = \rho(1+\varepsilon) \qquad \text{"} \quad \text{"} \quad f(t, r)$$

$$v \qquad \text{"} \quad -- \quad f(t, r)$$

$$\eta = k\varepsilon \qquad k = \frac{c_p}{c_v}$$

Si ha inoltre

$$v_x = v\frac{x}{r}$$

$$\rho\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial p'}{\partial x} \qquad \frac{dv_x}{dt} = \frac{x}{r}\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\rho'\frac{dv_y}{dt} = \frac{dp'}{dy}$$

$$\rho'\frac{dv_z}{dt} = \frac{dp'}{dz} \qquad \frac{\partial p'}{\partial x} = p\frac{\partial \eta}{\partial x} = p\frac{\partial \eta}{\partial r}\frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial(v\frac{x}{r})}{\partial x} = \frac{v}{r} + \frac{x^2}{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right)$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} = kp\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho v}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{2v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} \qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{3v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}$$

$$\frac{kp}{\rho} = c^2$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + 2\frac{\frac{\partial v}{\partial r}}{r} - \frac{2\partial v}{r^2\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad \rho\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{3v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r}$$

$$v = \frac{1}{r}\left[f_1\left(\frac{x}{c} + t\right) + f_2\left(\frac{x}{c} - t\right)\right] \qquad \frac{\partial v}{\partial t}$$

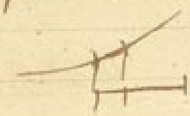
$$v = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

$$t - \frac{\rho}{c} = u$$

$$v = \frac{1}{\rho} f\left(t - \frac{\rho}{c}\right) = \rho_0 A\left[\operatorname{sen} k\left(u + \frac{\rho}{c}\right) + \cdots\right]$$

Suoni che derivano

Modo di vibrare dei corpi – considereremo, per esempio, il caso di una lamina elastica incastrata a una estremità e libera all'altra. L'equazione differenziale del movimento di quest'ultima, è, supponendo piccoli spostamenti,



$$\cancel{\frac{d^4y}{dt^4}} - \int_a^x m \frac{d^2y}{dt^2}\cancel{(x-\xi)\,dx = EI\,\rho\,\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$EI\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \cancel{\int\int_a^x m\frac{d^2y}{dt^2}(x-\xi\,dx) - \int_a^x}$$

$$-\int_a^x m\frac{d^2y}{dt^2}(\xi - x)\,d\xi + EI\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad (1)$$

se ~~dx~~ x ha un aumento $\underline{dx}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[-\int_a^{x} m\frac{d^2y}{dt^2}(\xi - x)\,d\xi\right] = \int_a^x m\frac{d^2y}{dt^2}\,d\xi$$

poichè l'elemento corrispondente a $\xi = x$ è infin di ordine superiore quindi (1) diventa

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + EI\frac{d^4y}{dx^4}$$

posto $a^2 = \frac{EI}{m}$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a^2\frac{d^4y}{dx^4} = 0 \quad (2)$$

poniamo $y = (u_1 \operatorname{sen} k_1 t + u_2 \operatorname{sen} k_2 t + \dots)$

u_1, u_2 .. sono funzioni incognite della sola x

k_1, k_2 " costanti da determinare

si ha $\frac{d^2y}{dt^2} = \sum u_k k^2 \operatorname{sen} kt$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \sum\frac{d^4u}{dx^4}\operatorname{sen} kt$$

$u' = c_1 w e^{wx} - c_2 w e^{-wx} + c_3 w\cos wx - c_4 w \operatorname{sen} wx$

$u'' = c_1 w^2 e^{wx} + c_2 w^2 e^{-wx} - c_3 w^2 \operatorname{sen} wx - c_4 w^2 \cos wx$

$u''' = c_1 w^3 e^{wx} - c_2 w^3 e^{-wx} - c_3 w^3 \cos wx + c_4 w^3 \operatorname{sen} wx$

da cui per la (2)

$$\sum u k^2 \operatorname{sen} kt = \sum\frac{d^4u}{dx^4}\operatorname{sen} kt$$

perchè siano ~~soddisfatte~~ soddisfatte

$$k^2 u = a^2\frac{d^4u}{dx^4}$$

$\cancel{c_1 w^2 e^{wx} + c_2 w^2 e^{-wx} - c_3 w^2 e^{wx}}$

questa equaz è risolta da

$$u = c_1 e^{\sqrt{\frac{k}{a}}x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{k}{a}}x} + c_3 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{k}{a}}\,x + c_4\cos\sqrt{\frac{k}{a}}\,x$$

c_1 c_2 c_3 c_4 costanti arb

le condiz ai limiti sono per $x = 0$ $y = 0$ $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$

per $x = a$ $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$ perchè l'estremo a è libero i.e.

$$0 = c_1 + c_2 \qquad + c_4 \qquad\qquad \sqrt{\frac{k}{a}} = \omega$$

$$0 = c_1\sqrt{\frac{k}{a}} - c_2\sqrt{\frac{k}{a}} + c_3\sqrt{\frac{k}{a}}$$

$$0 = c_1 e^{\omega a} + c_2 e^{-\omega a} - c_3 \cancel{\operatorname{sen}\omega a} - c_4 \cos\omega a$$

$$0 = c_1 e^{\omega a} - c_2 e^{-\omega a} - c_3 \operatorname{sen}\omega a + c_4 \cos\omega a$$

ossia

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ e^{\omega a} & e^{-\omega a} & -\operatorname{sen}\omega a & -\cos\omega a \\ e^{\omega a} & -e^{-\omega a} & -\cos\omega a & +\operatorname{sen}\omega a \end{vmatrix}$$

$\sqrt[4]{-\frac{K^2}{a^2}}$ $\quad \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$

$\frac{K}{a}\sqrt[4]{-1}$ $\quad \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$$\cancel{0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ e^{\omega a} & 0 & -\operatorname{sen}\omega a & 0 \\ 0 & e^{-\omega a} & 0 & -\cos\omega a \end{vmatrix}} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ e^{\omega a} & -\operatorname{sen} & -\cos \\ e^{\omega a} & -\cos & \operatorname{sen} \end{vmatrix}$$

$$0 = -\left[\cancel{\operatorname{sen}\omega a} + 1 + e^{-\omega a}\operatorname{sen}\omega a\right] - \cos\omega a\left[\operatorname{sen}\omega a + e^{\omega a}\operatorname{sen}\omega a\right]$$

$$0 = e^{\omega a}\cos\omega a + e^{-\omega a}\operatorname{sen}\omega a + 2\cos\omega a\operatorname{sen}\omega a + 1$$

Questa equaz. da infiniti valori ... di ωa — determinando allora le altre costanti si vede ~~...~~

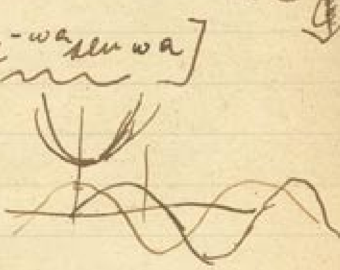
Teoria g...

$$0 = \left[\cancel{\operatorname{sen}^2}\,1 + e^{-\omega a}\cos\omega a - e^{-\omega a}\operatorname{sen}\omega a + \cancel{\cos^2}\right] - \left[-1 \cancel{-\operatorname{sen}^2} - e^{\omega a}\cos\omega a - e^{\omega a}\operatorname{sen}\omega a\right]$$

$$-\left[-e^{-\omega a}\cos\omega a + e^{\omega a}\operatorname{sen}\omega a - 2 - e^{\omega a}\cos\omega a - e^{-\omega a}\operatorname{sen}\omega a\right]$$

$$= 4 + 2e^{-\omega a}\cos\omega a + 2e^{\omega a}\cos\omega a$$

$$\cos\omega a\left(e^{\omega a} + e^{-\omega a}\right) + 2 = 0$$



Conseguenze

Caso del suono

Intensità = energia per unit volume Decrescenza ...

Quadrato della distanza

Altezza = numero delle vibr di un suono in un secondo

Metodi per produrre un suono di data altezza; diapason, sirena, sonometro,

Timbro. Suoni armonici. Fonautografo di Scott eccetera.

Problema

Una corrente elettrica, di intens cost circola in una bussola delle tg whose avvolg è nel ~~[illegible]~~ mag

Deviazione dell' ago 35°

Numero delle spire 5

Diametro del cerchio 50,2

Comp oriz mag terr 0,2356 [CGS

Calcolare l'intens della corr in [CGS]

I Calcolo dell'az di una spira corr i ~~[illegible]~~ raggio r su un polo m nel suo centro

Legge di Biot e Savart

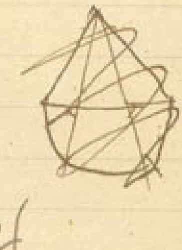
$$f_1 = \frac{m i \, dl \operatorname{sen} \varphi}{r^2} \qquad dl = 2\pi r \qquad \operatorname{sen}\varphi = 1$$

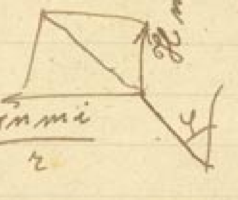
perciò

$$f_1 = \frac{2\pi m i}{r}$$

L'az di n spire sarà

$$f = \frac{2\pi n m i}{r}$$





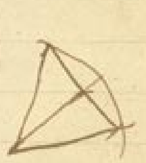
$\frac{2\pi n m i}{r}$

$$\frac{\frac{2\pi n m i}{r}}{H m} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\pi n i}{H r}$$

360 / 5

$$\boxed{i = \frac{H r}{2\pi n} \operatorname{tg} \varphi}$$

tg



tg 35.

$$i = \frac{0{,}2356 \times 25{,}1 \times \operatorname{tg} 35°}{2 \times 3{,}1416 \times 5}$$

 $\frac{\sqrt{5} - 1}{4} = \operatorname{sen} \frac{36}{2}$ $\quad \cos 36 = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{36}{2}$ $\quad x^2 = (1 - x)$ $\quad x^2 + x - 1$ $\quad \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$\operatorname{sen} 36/2 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

$\cos 36 = 1-2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{3-\sqrt{5}}{4} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$

$\operatorname{sen} 36 = \sqrt{1-\frac{(1+\sqrt{5})^2}{16}} = \sqrt{1-\frac{3+\sqrt{5}}{8}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$

G. Fittarelli

$\operatorname{tg} 36 = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}} =$

$\sqrt{5} = 2,234$

$2\sqrt{5} = 4,468$

$\sqrt{5,0000} = 2,234$; $42 \times 2 = 84$; $443 \times 3 = 1329$; $4464 \times 4 =$

$10{,}000 - 4{,}468 = 5{,}532$

$\sqrt{10-2\sqrt{5}} = 2,352$

$1+\sqrt{5} = 3,234$

$\sqrt{5{,}53.20} = 235$; $43\times 3 = 129$; $465 \times 5 = 2325$; 470

$\operatorname{tg} 36° = 2,352 : 3,234 = 0,7274$

$1,1760 : 1,617 = 0,7274$

$\operatorname{tg} 1° = \frac{\pi}{180} = \frac{3,1416}{180} = \frac{0,31416}{18} = \frac{0,10472}{6} = \frac{0,05236}{3} = 0,0174$

$0,729 - 0,014 = 0,703$

$\operatorname{tg} 35 = \frac{\operatorname{tg} 36 - \operatorname{tg} 1}{1+\operatorname{tg} 36 \operatorname{tg} 1} = \frac{0,703}{1,0122} = \frac{7030}{10122} = \frac{3515}{5061} = 0,694$

$35150 : 5061 = 0,694$

$i = \frac{0,2356 \times 25,1 \times 0,694}{31,416} = \frac{0,1178 \times 25,1 \times 0,347}{7,854} =$

$= \frac{0,0589 \times 25,1 \times 0,347}{3,927} = \frac{0,0589 \times 8,7097}{3,927} = \frac{0,513}{3,927} =$

$= 0,1306$ [CGS] $= 1,306$ ampères

$0,347 \times 25,1 = 8,7097$

$8,7097 \times 0,0589 = 0,51300$

$5130 : 3,927 = 0,1306$

$tg\, 36^\circ = 0{,}727$ $\quad tg\, 1^\circ = \frac{\pi}{180} = 0{,}0174$

$tg\, 35 = \frac{tg36 - tg1}{1 + tg36\, tg1} = \frac{0{,}710}{1{,}0122} = 0{,}700$

$i = \frac{0{,}2356 \times 25{,}1}{31{,}416}\, tg\varphi =$

$\frac{0{,}2356 \times 25{,}1}{31{,}416} = \frac{0{,}0589 \times 25{,}1}{7{,}854} = 0{,}1882\; tg\varphi = 0{,}13174 =$

$= 1{,}3174$ ampères

$0{,}0589 \times 25{,}1$: 589, 2945, 1178, 147839; 7154, 69299, 62832, 64570, 62832, 17380

$7{,}854$ | $0{,}188$

$0{,}1882 \times 0{,}7 = 0{,}13174$

$1{,}306 \times 0{,}7 = 1{,}317 \times (0{,}7 -$

$1{,}306 \times 0{,}7 = (1{,}306 + 0{,}011)(0{,}7 - 0{,}006)$

$0{,}7 \times 0{,}011 = 0{,}0077$

$1{,}306 \times 0{,}7$; $0{,}006 \times 1{,}306$: 36, 18, 6

$\frac{1}{T}\frac{1}{2}ma^2\int_0^T \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi}{T}t\, dt \qquad \frac{2\pi t}{T} = x$

$\frac{1}{4\pi} m a^2 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 x\, dx$

$\int \operatorname{sen}^2 x\, dx = x - \int \cos^2 x\, dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int \cos^2 x\, dx$

sen x, cos x, sen x, − cos x

$\frac{x + \operatorname{sen} x \cos x}{2} = \int \cos^2 x\, dx$

$\frac{x - \operatorname{sen} x \cos x}{2} = \int \operatorname{sen}^2 x\, dx$

2π

$\frac{1}{4} m a^2$

14 Novembre 1918

Enrico Fermi

Fisica

Caratteri distintivi dei suoni e loro cause.

Il suono consiste, come è noto, in rapide vibrazioni delle particelle d'aria che vengono messe in movimento sia dai corpi vibranti in esse immersi, sia da qualunque perturbazione che possa tra di esse avvenire. Per poter quindi studiare completamente i caratteri dei suoni occorre che fermiamo dapprima la nostra attenzione sulle seguenti questioni: Come vibrano i corpi? Come l'aria trasmette le loro vibrazioni?

Per rispondere alla prima questione mi limiterò a trattare un caso particolare; le vibrazioni trasversali di una verga elastica incastrata a una estremità e perfettamente libera all'altra. Supporremo inoltre la verga omogenea rettilinea e le vibrazioni piccolissime e piane. Prenderemo la posizione di riposo della verga per asse delle x e il punto di incastro per centro delle coordinate. Se con y indichiamo lo spostamento del punto di ascissa x al tempo t, le vibrazioni essendo piccolissime, si ha l'equazione

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \qquad (1)$$

dove per brevità ho posto $a^2 = \frac{EI}{m}$, m essendo la massa per unità di lunghezza, E il modulo di elasticità della verga ed I il momento d'inerzia della sua sezione. Poniamo.

$$y = u_1 \operatorname{sen} k_1 t + u_2 \operatorname{sen} k_2 t + \ldots = \sum u \operatorname{sen} kt$$

dove $u_1, u_2 \ldots$ sono funzioni della sola x e le k sono costanti per ora indeterminate. Si ha

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\sum k^2 u \operatorname{sen} kt \qquad \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = \sum \frac{d^4 u}{dx^4} \operatorname{sen} kt$$

Sostituendo in (1) si vede che perchè essa sia verificata occorre che le u soddisfino l'equazione:

$$a^2 \frac{d^4 u}{dx^4} - K^2 u = 0$$

Il cui integrale è

$$u = c_1 e^{\sqrt{\frac{K}{a}}x} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{K}{a}}x} + c_3 \operatorname{sen}\sqrt{\frac{K}{a}}\,x + c_4 \cos\sqrt{\frac{K}{a}}\,x$$

c_1, c_2, c_3, c_4 costanti arbitrarie

Osserviamo ora che essendo la verga incastrata nel punto $x=0$ per $x=0$ si deve avere (qualunque sia t) $y=0$ $\frac{\partial y}{\partial x}=0$ e perciò anche $u=0$ $\frac{du}{dx}=0$

In più all'estremità libera, che corrisponde ad $x=l$ si ha $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0$ e perciò $\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d^3 u}{dx^3} = 0$ - Vale a dire

$$\begin{aligned}
(u)_{x=0} &= c_1 + c_2 + c_4 = 0 \\
\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0} &= c_1 - c_2 + c_3 = 0 \\
& c_1 e^{\omega} + c_2 e^{-\omega} - c_3 \operatorname{sen}\omega - c_4 \cos\omega = 0 \\
& c_1 e^{\omega} - c_2 e^{-\omega} - c_3 \cos\omega + c_4 \operatorname{sen}\omega = 0
\end{aligned}$$

Dove si è posto per brevità $\omega = l\sqrt{\frac{K}{a}}$

Ora perchè le costanti $\underline{c}$ possano avere valori non tutti nulli bisogna che

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ e^{\omega} & e^{-\omega} & -\operatorname{sen}\omega & -\cos\omega \\ e^{\omega} & -e^{-\omega} & -\cos\omega & +\operatorname{sen}\omega \end{vmatrix} = 0$$

Vale a dire $\underline{\omega}$ deve soddisfare l'equazione

$$\cos\omega\left(e^{\omega} + e^{-\omega}\right) + 2 = 0 \qquad (2)$$

Trascurando le radici negative, che non danno un risultato distinto perchè uguali in valore assoluto alle positive, è facile riconoscere che la (2) ammette infinite radici che differiscono assai poco da

$$\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \dots$$

Chiamandole ω_1, $\omega_2 \dots$ si vede che K è uguale ad $\frac{\omega^2 a}{l^2}$

Se poniamo $K = \frac{2\pi}{T}$ (T è il periodo della vibrazione $\operatorname{sen} Kt$) si ha

$$T = \frac{2\pi l^2}{\omega^2 a} = \frac{2\pi l^2}{\omega^2}\sqrt{\frac{m}{EI}} \qquad (3)$$

Ora dando ad $\underline{\omega}$ il valori $\omega_1, \omega_2, \dots$ si trovano i periodi $T_1, T_2 \dots$ e si vede che la vibrazione complessa della nostra verga è decompo=

sibile nella somma di vibrazioni sinusoidali di periodi T_1 T_2 . . .
Di questi periodi il più piccolo T_1 si chiama periodo principale. grande
Si vede dunque che i corpi sono in generale capaci di vibrare secondo differenti periodi.

Passiamo ora ad esaminare la seconda questione, vale a dire quella della propagazione del suono. Supponiamo perciò che in un punto $\underline{O}$ di una massa gassosa si produca una perturbazione qualunque, purchè molto piccola e prendiamo questo punto per centro di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali x, y, z. Poniamo $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e sia t il tempo. E' evidente che a una certa distanza da $\underline{O}$ ~~tanto~~ la velocità $\underline{v}$ di una particella gassosa sarà solo funzione di r, t e sarà in direzione di $\underline{r}$ perciò se v_x, v_y, v_z sono le componenti della velocità sulle assi, x, y, z si havrà $v_x = v\frac{x}{r}$, $v_y = v\frac{y}{r}$, $v_z = v\frac{z}{r}$
Siano p, ρ la pressione e la densità del gas prima della perturbazione. p' e ρ' (funzioni di $\underline{r}$ e di t) i loro valori dopo la perturbazione e poniamo

$$p' = p(1+\eta) \qquad \rho' = \rho(1+\varepsilon)$$

Supponiamo η, ε, v, v_x, v_y, v_z, $\frac{1}{r}$ tanto piccoli che si possano trascurare i termini che li contengono a un grado superiore a 1°.
Supponiamo inoltre adiabatiche le trasformazioni del gas
Allora si ha

$$\frac{p'}{\rho'^{K}} = \frac{p}{\rho^{K}}$$

K = rapporto tra i calori specifici del gas a pressione e a volume costante

Da cui, trascurando i termini piccolissimi di secondo ordine

$$\eta = K\varepsilon$$

Inoltre, trascurando i termini di secondo ordine e osservando che la forza agente sulle particelle è nulla perchè trascuriamo la gravità, le equazioni dell'idrodinamica diventano

$$\rho\frac{\partial v_x}{\partial t} + p\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \qquad \cancel{\rho\frac{\partial v_x}{\partial t} + p\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0}$$ e due uguali per le assi y, e z

$$\rho\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho\left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right] = 0$$

ora si ha $\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial\left(v\frac{x}{r}\right)}{\partial x} = \frac{v}{r} + x\frac{\partial r}{\partial x}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right]$ ma $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ perciò

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{v}{r} + \frac{x^2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{x^2}{r^3} v$$

da cui

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{2v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r}$$

inoltre $$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{x}{r}\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial r}\frac{x}{r} = k\frac{x}{r}\frac{\partial \varepsilon}{\partial r}$$

Con ciò le equazioni precedenti diventano, trascurando i termini piccolissimi

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c^2\frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = 0 \qquad c^2 = \frac{pk}{\varrho}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{2v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0$$

eliminando ε e trascurando il termine $\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial r}$ di terzo ordine

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r}$$

Questa equazione, ponendo $rv = \varphi$ diventa

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}$$

che come è noto è ~~sodd~~ soddisfatta da

$$\varphi = f_1(ct+x) + f_2(ct-x) \qquad f_1 \text{ ed } f_2 \text{ ~~costanti~~ funzioni arbitrarie}$$

perciò

$$v = \frac{1}{r}\left[f_1(ct+x) + f_2(ct-x)\right]$$

f_1 corrisponde a un'onda che va verso O ed f_2 corrisponde a un'onda che si allontana da O allora, se supponiamo $f_1 = 0$

$$v = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) \qquad (4)$$

f funzione arbitraria. Se supponiamo allora che per $r = a$ sia $v = b \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{a}{c}\right)$ vediamo che

$$v = \frac{b}{r} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{c}\right)$$

che corrisponde a un onda sferica che si allontana da O con velocità costante $c = \sqrt{\frac{pk}{\varrho}}$ e con ampiezza inversamente proporzionale a r. Dalla 4 si vede dunque che le perturbazioni si trasmettono nel gas con velocità costante e non modificate nella forma ma solo nell'ampiezza che è inversamente proporzionale al raggio.

Una volta stabiliti questi due punti possiamo cercare ora quali sono i caratteri del suono.

Anzitutto è chiaro che, siccome il suono è prodotto dalle vibrazioni dell'aria, un suono sarà perfettamente determinato dalla conoscenza di queste vibrazioni. Ora una vibrazione è caratterizzata da tre elementi. L'ampiezza, il periodo, e la forma della curva. Vediamo ora in qual modo questi tre elementi influiscano sul suono.

G. Pittarelli

Ampiezza. Supponiamo per semplicità che le vibrazioni siano sinusoidali della forma $v = a \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t$ v è la velocità della particella in considerazione. La sua forza viva media sarà

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{4} m a^2$$

m è la massa. La forza viva media contenuta nell'unità di volume è $\frac{1}{4} \rho a^2$

E siccome i suoni si propagano con velocità $c = \sqrt{\frac{pK}{\rho}}$

si può dire che l'energia che attraversa ~~normalmente~~ una superficie di area 1 colpita normalmente da un'onda sinusoidale di ampiezza a nell'unità di tempo è

$$\frac{c}{4} \rho a^2 = \frac{\sqrt{p \rho K}}{4} a^2 = I$$

Ora si dice appunto intensità di un suono questa energia I e si può perciò dire che l'intensità di un suono è proporzionale al quadrato dell'ampiezza. Ora abbiamo visto che l'ampiezza di un suono è inversamente proporzionale alla distanza dalla sorgente. Possiamo perciò concludere che l'intensità è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dalla sorgente sonora. L'intensità è quel carattere per cui si dice che un suono è forte o debole.

Periodo. Il periodo è quel carattere per cui si dice se un suono è acuto o basso. Abbiamo mostrato poco fa che i gas trasmettono i suoni senza alterarne altro che l'intensità e perciò

possiamo dire che l'altezza di un suono non dipende dalla distanza dalla sorgente. Per produrre suoni di una determinata altezza si ricorre a vari metodi. Uno dei migliori è quello della sirena.
La sirena consta essenzialmente di una scatola cilindrica nella quale si può immetter dell'aria. Il coperchio superiore contiene una serie di fori equidistanti disposti in circolo. Sopra a questo coperchio, a piccolissima distanza è libero di girare un disco che contiene un ugual numero di fori egualmente disposti. Se si fa girare il disco superiore in modo che faccia N giri al secondo mentre si immette l'aria nella scatola si ottiene un suono di periodo

$$\frac{1}{nN}$$

n essendo il numero dei fori perchè ogni volta che dei fori del disco superiore vengono a combaciare con quelli del disco inferiore l'aria che è nella scatola è libera di uscirne. Per produrre la rotazione automatica del disco si mettono le assi dei fori superiori alquanto inclinate su quelle dei fori inferiori così che la propulsione è effettuata dall'aria che esce con violenza. Un apposito contagiri permette di determinare la velocità di rotazione del disco che si regola immettendo più o meno aria. Un altro metodo molto in uso è quello del sonometro che consiste essenzialmente in una cordicella che si fa vibrare. Sospendendole un opportuno peso se ne regola la tensione in modo che dia un suono dell'altezza voluta.

Per riconoscere in mezzo ad un miscuglio di suoni quali abbiano una determinata altezza servono egregiamente i risuonatori di Helmholz che sono dei vasi aperti di forma sferica e di dimensioni calcolate in modo che, accostandoli all'orecchio, rinforzino per risonanza soltanto il suoni del loro proprio periodo.

Forma della vibrazione. Abbiamo dimostrato poco fa che i corpi elastici sono capaci di vibrare non solo secondo un periodo, bensì secondo molti e che le ampiezze delle vibrazioni dei varii periodi dipendono ~~solo~~ dalla deformazione iniziale. Risulta da ciò che la curva che rappresenta una vibrazione sonora ~~dipende~~ non è ~~mai~~ in generale una sinusoide bensì un'altra curva che si può però sempre ridurre alla somma di un certo numero di sinusoidi. Non riesce infatti difficile, a un orecchio esercitato distinguere nel suono della corda di uno strumento il suono che ha un numero di vibrazioni doppio di quello principale. Per determinare la forma della curva corrispondente a un dato suono si può usare con vantaggio il seguente metodo, dovuto a Scott. Nel ~~vertice~~ fuoco di una cavità in forma di paraboloide di rivoluzione è tesa una membranella. Quando si produce un suono davanti alla cavità questo suono viene riflesso dal paraboloide nel suo fuoco e mette così in vibrazione la membrana. Questa, per mezzo di un opportuno sistema di leve trasmette le sue vibrazioni ad un ago il quale a sua volta le segna su un foglio di carta affumicata avvoltolato su un cilindro posto in rapida rotazione. Per evitare poi che, girando il cilindro, i segni dell'ago si sovrappongano, il cilindro è montato su un'asse a vite in modo che ogni giro si sposta di una lunghezza conveniente. Un altro metodo consiste nell'unire a una serie di risonatori di Helmoltz delle fiamme manometriche e osservarle poi con l'aiuto di uno specchio girante mentre si produce il suono da analizzare. Si vedrà allora che si agitano le fiammelle il cui ~~periodo~~ risonatore ha il suo periodo compreso fra quelli del suono analizzato. ~~Dalla forma dei risonatori dipende~~

Dalla forma della vibrazione dipende il così detto timbro o metallo di un suono. È in essa è pure da ricercare la distinzione tra suono e rumore perchè un rumore corrisponde a una vibrazione mista e disordinata. Noterò in ultimo come il nostro orecchio possa riconoscere i varii periodi di cui è composto un suono grazie all'organo di Corti che, schematicamente consta di una serie di laminette ~~di un determinato~~ capaci di vibrare secondo un certo periodo che sono messe, per risonanza, in moto dal suono.

Problema

Una corrente elettrica circola in una bussola delle tangenti il cui avvolgimento è orientato nel piano del meridiano magnetico; si produce perciò una deviazione del breve ago posto al centro.

Diametro del cerchio su cui sono avvolte le spire	cm 50,2
Numero delle spire	5
Deviazione dell'ago	35°
Componente orizzontale del campo magnetico terrestre in unità assolute [C.G.S.]	0,2356

Si richiede di calcolare la misura dell'intensità della corrente in unità assolute [C.G.S].

L'azione esercitata da una spira circolare di raggio r sopra un polo magnetico m situato nel suo centro è

$$f_1 = \frac{2\pi m i}{r}$$

se i è l'intensità della corrente che circola nella spira

Quella esercitata da n spire sarà perciò

$$f = \frac{2\pi m n i}{r}$$

L'azione esercitata dalla componente orizzontale H del magnetismo terrestre sullo stesso polo è

$$f' = H m$$

Ora perchè un ago magnetico composto di due poli m e −m possa stare in equilibrio occorre che, φ essendo la sua deviazione si abbia

$$\frac{f}{f'} = tg\,\varphi$$

ossia

$$tg\,\varphi = \frac{2\pi n i}{H r}$$

da cui

$$i = \frac{H r}{2\pi n} tg\,\varphi$$

Nel nostro caso

$H = 0,2356$; $r = \frac{50,2}{2} = 25,1$ $n = 5$ perciò

Foglio III 3F

G. Pittarelli

$$i = 0,1882 \, tg\, \varphi$$

ora se $\varphi = 35°$ si ha

$$tg\,\varphi = tg(36° - 1°) = \frac{tg\,36° - tg\,1°}{1 + tg\,36°\,tg\,1°}$$

ora $\quad tg\,36° = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}} = 0,727$

Essendo ~~il~~ 1° un arco assai piccolo si può porre con grande approssimazione

$$tg\,1° = \frac{\pi}{180} = 0,0174$$

perciò

$$tg\,\varphi = 0,700$$

Perciò nel caso nostro

$$i = 0,1317 \text{ unità assolute } [C.G.S] = 1,317 \text{ ampères}$$

Enrico Fermi